

ch. 1 : L'arithmétique dans IN

N désigne l'ensemble des entiers naturels : $N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

L'arithmétique est l'étude des nombres entiers et des opérations sur ces nombres

Proposition : Pour tout $a \in N$ et $b \in N$

$$(a + b = 0) \Rightarrow (a = b = 0) \quad | \quad (ab = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0) \quad | \quad (ab = 1) \Rightarrow (a = b = 1)$$

La divisibilité dans N :

Soient a et d deux entiers naturels, tels que $d \neq 0$

On dit que d divise a , s'il existe $k \in N$ tel que $a = kd$. L'entier k est appelé le quotient de a par d .
 d est appelé un diviseur de a et a est dit un multiple de d .

Nombres pairs et impairs

Tout entier naturel est soit pair soit impair.

- S'il est multiple de deux, c'est un nombre pair. Par exemple, les nombres : 4, 8, et 60, sont pairs. Le nombre zéro est pair, parce qu'il est égal à 2 multiplié par 0.
- Sinon, le nombre est impair. Par exemple 5, 3, et 71 sont impairs. Le nombre un est impair, c'est le plus petit entier naturel impair.

L'ensemble des entiers naturels pairs peut être écrit comme ceci :

$$\text{Entiers naturels pairs} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\} = \{2n; n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N}$$

De même, les ensembles des entiers impairs naturels ou relatifs s'écrivent

$$\text{Entiers naturels impairs} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} = \{2n + 1; n \in \mathbb{N}\}$$

Propriétés :

- pair \pm pair = pair ;
- pair \pm impair = impair ;
- impair \pm impair = pair.
- pair \times pair = pair ;
- pair \times impair = pair ;
- impair \times impair = impair.
- pair / impair = pair ;
- impair / impair = impair ;
- impair / pair n'est jamais un entier ;
- pair / pair peut être pair ou impair.

Division euclidienne dans N

Soient a et b deux entiers naturels où $b > 0$.

Il existe un couple unique d'entiers naturels (q, r) tels que : $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$, q est appelé le quotient, r le reste, a le dividende et b le diviseur de la division euclidienne de a par b .

Le PGCD de deux entiers naturels

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Le PGCD de a et b est le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs aux deux entiers a et b . On note par $\text{PGCD}(a, b)$ ou $a \wedge b$.

Exemple : Calculer $\text{PGCD}(a, b)$ avec $a = 36$ et $b = 24$

$$a = 2^2 \times 3^2 \text{ et } b = 3 \times 2^3$$

On a

\times	1	2	4
1	1	2	4
3	3	6	12
9	9	18	36

Alors $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ et on a

\times	1	2	4	8
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24

$$\text{Alors } D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$\text{Alors } D_{24} \cap D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \text{ alors } \text{PGCD}(24, 36) = 12$$

Détermination du PGCD(a,b) en utilisant l'algorithme d'Euclide :

- Soit r le reste de la division euclidienne de a par b alors : $a \wedge b = b \wedge r$
- Le PGCD(a,b) est le dernier reste non nul de la suite des divisions euclidiennes dans

L'algorithme d'Euclide:Recherche de PGCD(a,b).

On pose $a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b$ alors $a \wedge b = b \wedge r_1$ si $r_1 \neq 0$
 si $r_1 = 0$ alors $a \wedge b = b$.

$b = r_1q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$ alors $b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$ si $r_2 \neq 0$
 si $r_2 = 0$ alors $b \wedge r_1 = r_1$.

$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2$ alors $r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3$ si $r_3 \neq 0$
 si $r_3 = 0$ alors $r_1 \wedge r_2 = r_2$.

puisque la suite des nombres entiers positifs (r_n) est strictement décroissante et minorée par 0, le nombre d'étapes est majoré par b et $a \wedge b$ est le dernier reste r_n non nul.

Exemple : Calculer PGCD(385,140) alors PGCD(385,140) = 35

a	b	r_1	r_2	r_3	
385	140	105	<u>35</u>	0	
quotient \rightarrow	2	1	3		

Le PPCM de deux entiers naturels

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Le PPCM de a et b est le plus petit commun multiple de a et b .
 On note par : PPCM(a, b) ou $a \vee b$.

Critères de divisibilité

Convention d'écriture

Pour ne pas confondre un nombre avec son écriture dans sa décomposition en base 10, on notera $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ le nombre pour lequel a_0 est le chiffre des unités, a_1 celui des dizaines, etc.

On a ainsi $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 10 + \dots + a_n \cdot 10^n$
 (Exemple : $x = 10296 = 6 + 9 \times 10 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^3 + 1 \times 10^4$)

Divisibilité par 3 :

Un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme des ses chiffres est divisible par 3.

Divisibilité par 4 ou 25

Un entier naturel est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25)

Divisibilité par 5 :

Un entier naturel est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5.

Divisibilité par 8 :

Un entier naturel ≥ 100 est divisible par 8 si et seulement si nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.

Divisibilité par 9 :

Un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme des ses chiffres est divisible par 9.

Divisibilité par 11 :

Un entier naturel. On désigne par S_1 la somme des ses chiffres de rang impairs (de droite à gauche) et S_2 la somme des ses chiffres de rang pairs.

Soit $d = S_1 - S_2$.

Si $d \geq 0$ alors n est divisible par 11 si et seulement si d est divisible par 11

est divisible par 11 si et seulement si la somme des ses chiffres est divisible par 9.

Si $d < 0$ alors n est divisible par 11 si et seulement si $d + 11p$ est divisible par 11

(p le plus petit entier naturel tel que $d + 11p \geq 0$)

Entiers premiers entre eux

On dit que les deux entiers a et b sont étrangers ou premiers entre eux, si $a \wedge b = 1$

Exemple : Montrer que 144 et 385 sont premiers entre eux.

a	b	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	
385	144	97	47	3	2	<u>1</u>	0	alors $144 \wedge 385 = 1$
quotient \rightarrow	2	1	2	15	1	2		

Nombres premiers :

Définitions :

- Un entier naturel $p \geq 2$ est dit premier, si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.
- Un entier naturel, distinct de 1, non premier est appelé entier composé.
- Un entier naturel est un carré parfait lorsque sa racine carrée est un entier naturel.

Théorèmes

- Tout entier naturel n admet au moins un diviseur premier.
- Si n est un entier naturel distinct de 1, alors le plus petit diviseur de n distinct de 1 est premier.
- Un entier naturel $n > 1$ est composé, si et seulement si, il admet un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$

Comment reconnaître qu'un nombre est premier ?

Pour reconnaître si un nombre entier naturel n est premier, on effectue les divisions Euclidiennes successives par les nombres premiers inférieurs à \sqrt{n} pris dans l'ordre croissant.

- si l'une de ces divisions donne pour reste 0, alors ce nombre n'est pas premier ;
- si aucune division ne donne pour reste 0, on peut alors conclure que ce nombre est premier.

Exemple : 217 est-il un nombre premier ?

On a : $\sqrt{217} = 14.7309\dots$ alors $14^2 < 217 < 15^2$ alors les nombres premiers ≤ 14 sont 2,3,5,7,11,13. Si l'un des ces nombres divise 217 alors est un nombre composé, si non, 217 est un nombre premier.

On a : 2, 3, 5 ne divise pas 217 mais 7 divise 217 alors 217 est un nombre composé.

Crible d'Erathostène :

C'est un tableau permettant de déterminer les nombres premiers inférieurs à 100.

Les nombres dans les cases grisées sont des nombres premiers.

Pour remplir ce tableau, on procède par élimination:

- On élimine le 1;
- On garde 2 et on élimine tous les multiples de 2;
- On garde 3 et on élimine tous les multiples de 3;
- ...etc

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Propriétés la décomposition en facteurs premiers

- Il existe une infinité de nombres premiers.
- Tout entier naturel $n \geq 2$, se décompose en un produit fini de nombres premiers.
- Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe des nombres premiers distincts deux à deux p_1, \dots, p_k et des entiers naturels non nuls a_1, \dots, a_k tels que $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ et n se décompose de façon unique sous la forme

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_k^{a_k}$$

Exemple : $n = 216 :$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

$$\text{alors } 216 = 2^3 \times 3^3$$

Le PGCD, le PPCM et la décomposition en facteurs premiers

Le **PGCD** de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b . Ainsi,

$$\text{si } a = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \quad \text{et} \quad b = 2^2 \times 3^5 \times 7^3 \times 11 \quad \text{alors} \quad \text{pgcd}(a, b) = 2^2 \times 3^4 \times 7.$$

Le **PPCM** de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant dans a ou dans b munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b . Ainsi,

$$\text{si } a = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \quad \text{et} \quad b = 2^2 \times 3^5 \times 7^3 \times 11 \quad \text{alors} \quad \text{ppcm}(a, b) = 2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 7^3$$