CH I: ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{N}$

TCS - LYDEX/BENGUERIR

Année Scolaire: 2021-2022

.

1- Activités

1. Déterminer parmis les nombres de la liste suivante les nombres entiers naturels :
$$3 \quad 2{,}34 \quad \sqrt{36} \quad \frac{3}{8} \quad 222 \quad \frac{2^3}{2} \quad \sqrt{3} \quad \frac{28}{4}$$
2. Dire si les nombres suivants sont des entiers naturels :
$A = 1 - \sqrt{2} \quad B = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2\sqrt{24}$
$$C = (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 \quad D = \frac{4}{1+\sqrt{2}} + \frac{4}{1-\sqrt{2}}$$

2- Définition

définition

L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels .
On écrit : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$

- le nombre 7 est un entier naturel .

on dit : 7 appartient à $\mathbb{N}$ et on note $7 \in \mathbb{N}$

- le nombre 3,5 n'est pas un entier naturel .

on dit $3,5$ n' appartient pas à $\mathbb{N}$ et on note : $3,5 \notin \mathbb{N}$

- $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels privé de zéro .

on écrit : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$

- L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$ .On dit aussi $\mathbb{N}^*$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$

On note : $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, et on lit :$\mathbb{N}^*$ est inclus dans $\mathbb{N}$.

1- Diviseurs d'un nombre

a- Activités

1. - Déterminer les diviseurs de 24 . (On note D_{24}l'ensemble des diviseurs de 24).
   - Déterminer les diviseurs de 36
   - Déterminer les diviseurs communs de 24 et 36
2. Un groupe se compose de n personnes . On veut diviser ce groupe en petits groupes (sous-groupes) de 3 ou 4 personnes .
   Quelles sont les valeurs de n ?

1- Diviseurs d'un nombre

b- Définitions

Définition 1 :

Soit a et b deux entiers naturels .

- On dit que b est un diviseur de a s'il existe un entier naturel k tel que $a = kb$.
- On dit aussi : a est divisible par b ou b divise a .
- On dit aussi : a est un multiple de b .

1- Diviseurs d'un nombre

b- Définitions

Définition 1 :

Soit a et b deux entiers naturels .

- On dit que b est un diviseur de a s'il existe un entier naturel k tel que $a = kb$.
- On dit aussi : a est divisible par b ou b divise a .
- On dit aussi : a est un multiple de b .

Définition 2 :

Soit n un entier naturel non nul.

Les multiples de n sont : $0, n, 2n, 3n, 4n, ...$

On note leur ensemble : $M_n = \{0, n, 2n, 3n, 4n, ...\}$

Exemples

On a : $45 = 9 * 5$.
9 et 5 sont des diviseurs de 45 .
45 est un multiple de 5 et aussi multiple de 9 .
45 est divisible par 5 et par 9

Exemples

On a : $45 = 9 * 5$.
9 et 5 sont des diviseurs de 45 .
45 est un multiple de 5 et aussi multiple de 9 .
45 est divisible par 5 et par 9
Remarque :
Le nombre 0 admet une infinité de diviseurs

1. Montrer que a est un multiple de b dans les cas suivants :
   $a = 120 * 28$, $b = 5 * 24$
   $a = 15 * 750$, $b = 25^2 * 3$
   $a = 5^3 * 8^2 * 9$, $b = 5^2 * 4^2 * 3$
2. a) Determiner tous les diviseurs communs de 24 et34
   b) on pose : $x = 3 * 5 * 7 * 12$ et $y = 2 * 5 * 3 * 5$.
   Sans calculer x et y , montrer que :
   - 75 est un diviseur de y
   - x est un multiple de 105

2- Nombres pairs - Nombres impairs

Définitions

Définition 1 :

un nombre entier naturel n est **pair** s'il est divisible par 2 .
donc s'écrit sous la forme $n = 2k$ avec k entier naturel.
Les nombres pairs sont donc 0, 2, 4, 6 ..

2- Nombres pairs - Nombres impairs

Définitions

Définition 1 :

un nombre entier naturel n est **pair** s'il est divisible par 2 .
donc s'écrit sous la forme $n = 2k$ avec k entier naturel.
Les nombres pairs sont donc 0, 2, 4, 6 ..

Définition 2 :

un nombre entier naturel n est **impair** s'il n'est pas pair.
donc n'est pas divisible par 2 et s'écrit : $n = 2k + 1$ avec k entier naturel.
les nombres impairs sont 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

Remarques :

- un nombre entier naturel n est soit pair soit impair .
- Si deux entiers naturels sont consécutifs alors l'un est pair et l'autre est impair

Remarques :

- un nombre entier naturel n est soit pair soit impair .
- Si deux entiers naturels sont consécutifs alors l'un est pair et l'autre est impair

Résultats :

Soit n un entier naturel

- Si n est pair alors n^2 est pair .
- Si n est impair alors n^2 est impair .
- Si deux entiers naturels sont consécutifs alors leur produit est pair .

Applications :

n et m sont deux entiers naturels.

1. Étudier la parité de n^3, n^4
2. Étudier la parité de $n+m$,nm , $2n^2+7$,n^2+n et $4n^2+4n+1$
3. Déterminer les nombres pairs et les nombres impairs de la liste suivante :
   $367890 - 16485 - 14^2+6 - 15^2+13^2 - 211*24 - 37*301 - 13^2 - 111$

3-Critère de divisibilité par 2 , 3 , 4 , 5 et 9

Propriétés

Soit n un entier naturel .

- n est divisible par 2 si son chiffre des unités est : 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8
- n est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3
- n est divisible par 4 si le nombre formé par son chiffre des unites est et son chiffre de dizaines est un multiple de 4
- n est divisible par 5 si son chiffre des unites est 0 ou 5
- n est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9 .

Exemples :

- Le nombre 96345 est divisible par ......
- Déterminer le chiffre a pour que le nombre $4385a$ soit divisible à la fois par 2 et 3.

4- Plus grand diviseur commun

Définitions

Définition 1 :
d est un diviseur commun de a et b si d est diviseur à la fois de a et de b

4- Plus grand diviseur commun

Définitions

Définition 1 :

d est un diviseur commun de a et b si d est diviseur à la fois de a et de b

Définition 2 :

Soit a et b deux entiers naturels .

Le plus grand diviseur commun de a et b s'appelle **le plus grand commun diviseur de a et b** .

On le note PGCD(a,b) ou $a \wedge b$.

4- Plus grand diviseur commun

Définitions

Définition 1 :

d est un diviseur commun de a et b si d est diviseur à la fois de a et de b

Définition 2 :

Soit a et b deux entiers naturels .

Le plus grand diviseur commun de a et b s'appelle **le plus grand commun diviseur de a et b** .

On le note PGCD(a,b) ou $a \wedge b$.

Exemples :

5- Plus petit commun multiple

Définition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls .
Le plus petit multiple commun de a et b non nul s'appelle **le plus petit commun multiple de a et b** . On le note $PPCM(a, b)$ ou $a \vee b$.

5- Plus petit commun multiple

Définition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls .
Le plus petit multiple commun de a et b non nul s'appelle **le plus petit commun multiple de a et b** . On le note $PPCM(a, b)$ ou $a \vee b$.

Exemples :

Calculer $ppcm(3, 4)$, $ppcm(12, 16)$

6- Propriétés

Propriété 1

Soit a, b et c des entiers naturels . On a :

1. Si a divise à la fois b et c alors a divise $b + c$
2. Si a divise à la fois b et c et b> c alors a divise b-c

6- Propriétés

Propriété 1

Soit a, b et c des entiers naturels . On a :

1. Si a divise à la fois b et c alors a divise $b + c$
2. Si a divise à la fois b et c et b> c alors a divise b-c

démonstration :

6- Propriétés

Propriété 1

Soit a, b et c des entiers naturels . On a :

1. Si a divise à la fois b et c alors a divise $b + c$
2. Si a divise à la fois b et c et b> c alors a divise b-c

démonstration :

Propriété 2

Soit a et b deux entiers naturels .
On a : $(a \wedge b) * (a \vee b) = ab$

7- Algorithme d'Euclide

..

L'algorithme d'Euclide est une méthode qui permet de déterminer le PGCD de deux nombres entiers naturels (qu'on appelle aussi **méthode des divisions successives**).

7- Algorithme d'Euclide

..

L'algorithme d'Euclide est une méthode qui permet de déterminer le PGCD de deux nombres entiers naturels (qu'on appelle aussi **méthode des divisions successives**).

Exemples :

Calculer : $PGCD(180, 600)$, $PGCD(456, 120)$

Méthode :

1- Définition

définition

On appelle nombre premier tout entier naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui même.

1- Définition

définition

On appelle nombre premier tout entier naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui même.

Exemples :

2 ,7,11,19,..sont des nombres premiers

III- Nombres Premiers

1- Définition

définition

On appelle nombre premier tout entier naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui même.

Exemples :

2 ,7,11,19,..sont des nombres premiers

Remarques :

- 1 n'est pas premier car il ne posséde qu'un seul diviseur .
- Tout nombre n premier ($n \neq 2$) est impair

Liste de nombres premiers inférieurs à 100

:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2- CRIBLE D’ERATHOSTENE

Propriété

Un nombre entier est premier s’il n’est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à sa racine carrée .

N.B :

Cette méthode nous permet de reconnaître si un nombre est premier ou pas .

2- CRIBLE D'ERATHOSTENE

Propriété

Un nombre entier est premier s'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à sa racine carrée .
N.B :
Cette méthode nous permet de reconnaître si un nombre est premier ou pas .

Exemples :
Le nombre $n = 127$ est-il premier ?
Méthode :
Comme $\sqrt{127} \simeq 11,27$ alors il suffit de vérifier que 127 n'est divisible par aucun des nombres premiers $2, 3, 5, 7$ et 11 !
Dápres les critères de divisibilité , 127 n'est pas divisible par 2 ou par 3 ou par 5 .
Pour les nombres 7 et 11 , on effectue la division euclidienne .
On vérifie alors que 127 n'est pas divisible par 7 ou par 11 .

3- Nombres premiers entre eux

Définition

Soit a et b des entiers naturels .
a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$

3- Nombres premiers entre eux

Définition

Soit a et b des entiers naturels .
a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$

Exemples :
3 et 7 sont premiers entre eux , car $3 \wedge 7 = 1$

4- Dćomposition en produit de facteurs premiers

Propriété 1

Tout nombre entier naturel non nul et différent de 1 s'écrit sous forme d'un produit de facteurs premiers .

4- Dćomposition en produit de facteurs premiers

Propriété 1

Tout nombre entier naturel non nul et différent de 1 s'écrit sous forme d'un produit de facteurs premiers .

Exemples :

Pour décomposer un entier en produit de facteurs premiers , on efféctue des divisions successives par des nombres premiers dans l'ordre croissant .

On décompose le nombre $n = 882$ en produit de facteurs premiers :

Méthode :

.....................................donc $882 = 2 * 3^2 * 7^2$

Propriété 2

Tout entier naturel strictement supérieur à 1 est soit premier soit produit de facteurs premiers

Propriété 2

Tout entier naturel strictement supérieur à 1 est soit premier soit produit de facteurs premiers

Propriété 3

a et b deux nombres entiers naturels .
Pour calculer le PPCM de a et b :

- On décompose chacun des nombres en facteurs premiers.
- On calcule le produit de tous les facteurs différents apparus dans les deux décompositions, chacun étant pris avec son plus grand exposant.

Propriété 2

Tout entier naturel strictement supérieur à 1 est soit premier soit produit de facteurs premiers

Propriété 3

a et b deux nombres entiers naturels .
Pour calculer le PPCM de a et b :

- On décompose chacun des nombres en facteurs premiers.
- On calcule le produit de tous les facteurs différents apparus dans les deux décompositions, chacun étant pris avec son plus grand exposant.

Exemples :

Propriété 4

a et b deux nombres entiers naturels .
Pour calculer le PGCD de a et b :

- On décompose chacun des nombres en facteurs premiers.
- On calcule le produit de leurs facteurs premiers communs des deux décompositions, chacun étant pris avec son plus petit exposant.

Propriété 4

a et b deux nombres entiers naturels .
Pour calculer le PGCD de a et b :

- On décompose chacun des nombres en facteurs premiers.
- On calcule le produit de leurs facteurs premiers communs des deux décompositions, chacun étant pris avec son plus petit exposant.

Exemples :

Applications :

Application 1

Soit n un entier naturel .

1. Montrer que $A = n^2 + 3n + 2$ est un nombre pair
2. Étudier la parité de $1 + 3^n$
3. Montrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3
4. Montrer que si n est impair , alors 8 divise $n^2 - 1$

Application 2

Dans un lycée , les élèves se décomposent en 408 garçons et 578 filles .On veut former des équipes mixtes de telle sorte qu'il y ait le même nombre de garçons dans chaque équipe et le même nombre de filles dans chaque équipe .On veut aussi que tous les élèves soient dans une même équipe .

1. Quel est le nombre maximal d'équipes pouvant être formées ?
2. Donner alors la composition de chaque équipe .