

CHAPITRE 9

CALCUL INTÉGRAL

9.1 Intégrale d'une fonction continue :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 9.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et soit F sa primitive sur $[a; b]$.

Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé l'intégrale (ou somme) de a à b de f on le note $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple :

Calculons : $\int_0^1 x^2 dx$, on a la fonction $x \rightarrow f(x) = x^2$ est continue sur $[0; 1]$ donc admet une primitive sur $[0; 1]$ qu'est : $F(x) = \frac{x^3}{3}$, donc : $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$.

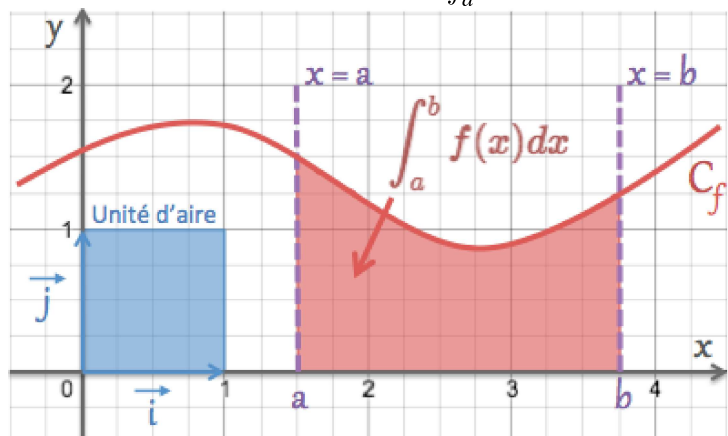
Exercice :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^2 4x^3 - x dx$; 2) $\int_0^\pi \cos(x) dx$; 3) $\int_0^{\ln(2)} e^{\frac{t}{2}} dx$; 4) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

Interprétation géométrique :

Si f est une fonction **continue positive** sur $[a; b]$, alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$: est égale à : $\int_a^b f(x)dx \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\|$



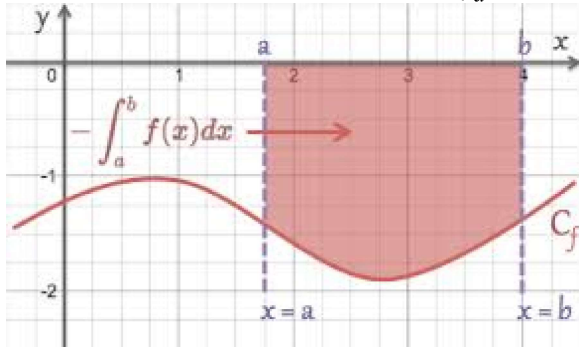
On note : $\int_a^b f(x)dx \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| = \text{Aire}(\mathcal{D})$.

Remarques :

- On peut remplacer x dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \dots\dots$$

- $\mathcal{D} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$
- Si f est négative sur $[a;b]$ alors : $-\int_a^b f(x)dx \parallel \vec{i} \parallel \cdot \parallel \vec{j} \parallel = \text{Aire}(\mathcal{D})$.

**Propriété 9.1**

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et k et c deux réels.

- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b (kf)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$

Exercice :

1) Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^2 |x-1|dx; I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx; I_3 = \int_0^1 \sqrt{t+2}dt; I_4 = \int_{\ln(2)}^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt; I_5 = \int_0^3 |x^2-3x+2|dx$$

2) a) Linéariser $\sin^3(x)$,

b) Calculer l'intégrale : $\int_0^\pi \sin^3(x)dx$

9.2 Méthode de calcul des intégrales**9.2.1 Méthode directe**

Calculer les intégrales suivantes : (Il faut chercher une primitive de la fonction) :

- $I = \int_1^e \frac{(\ln(x))^3}{x}dx$
- $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$
- $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$

9.2.2 Méthode d'intégration par parties

Théorème 9.1

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que leurs dérivés sont

continue sur $[a; b]$ alors : $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Exemple :

Calculons l'intégrale : $I = \int_0^1 xe^x dx$, posons : $f'(x) = e^x$ et $g(x) = x$, alors : $f(x) = e^x$ et $g'(x) = 1$
donc : $I = [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$

Exercice :

En utilisant la méthode de l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e x \ln(x) dx ; \quad I_2 = \int_1^e \ln(x) dx ; \quad I_3 = \int_0^1 (2x-1)e^{2x} dx ; \quad I_4 = \int_0^\pi x \cos(x) dx ;$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x dx ; \quad I_6 = \int_0^1 \ln(x+1) dx ; \quad I_7 = \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x^2} dx ; \quad I_8 = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

9.3 Intégrale et ordre

9.3.1 Comparaison de deux intégrales :

Propriété 9.2

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
- Si $(\forall x \in [a; b]) : f(x) \geq 0$ alors : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si $(\forall x \in [a; b]) : f(x) \geq g(x)$ alors : $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

Exercice :

- 1) Montrer que : $\forall x \in [0; 1] : \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x^2} \leq x^2$,
- 2) En déduire un encadrement de l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

9.3.2 La valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Définition 9.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Le réel : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

Théorème 9.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

- Si deux réels m et M sont tels que : $\forall x \in [a; b] \ m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M,$$

- Il existe $c \in [a; b]$ tel que : $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

Exercice :

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $\ln$ sur $[1; e]$.

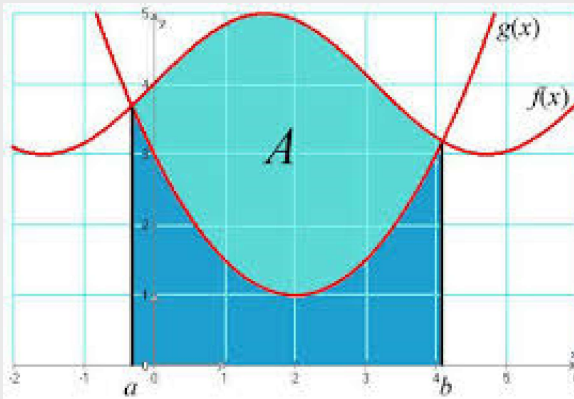
9.4 Calcul d'aires - Calcul de volumes

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

9.4.1 Calcul d'aires**Théorème 9.3**

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

L'aire exprimée en unités d'aires, de la surface comprise entre les deux courbes des fonctions f et g et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$, est le réel positif : $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

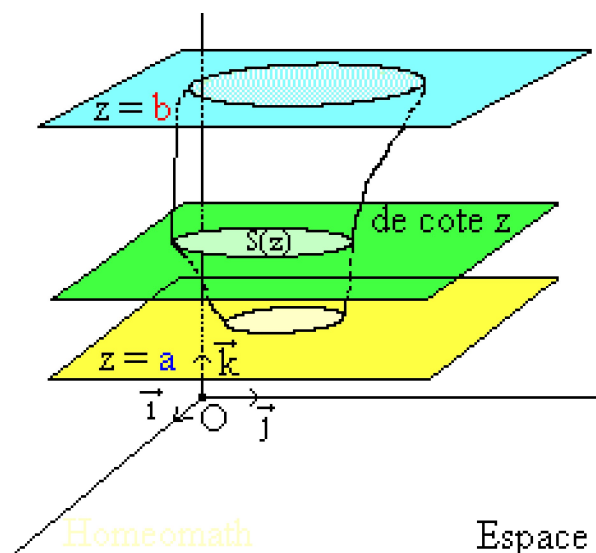
**Cas particulier :**

L'aire exprimée en unités d'aires, de la surface comprise entre la courbe de f et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$, est le réel positif : $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx$

9.4.2 Calcul de volumes**Théorème 9.4**

Soit S un solide compris entre deux plans parallèles d'équations : $z = a$ et $z = b$ et soit $S(t)$ la section du solide S par le plan d'équation $z = t$ avec $a \leq t \leq b$.

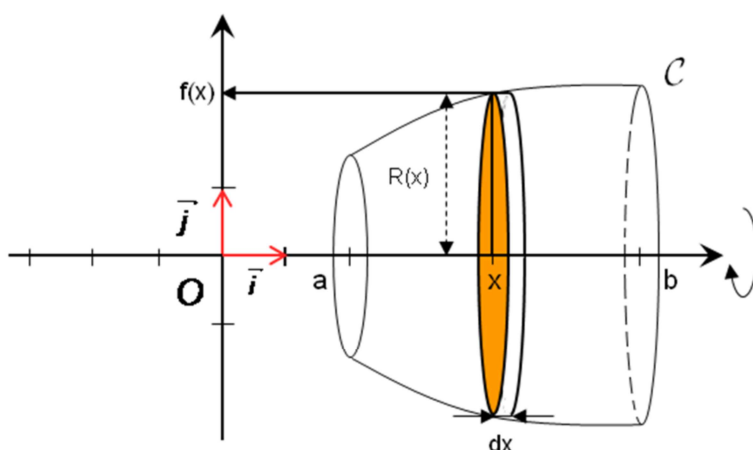
Si la fonction $t \mapsto S(t)$ est continue sur $[a; b]$ alors le volume V du solide S , exprimée en unité de volume, est le réel positif : $V = \int_a^b S(t) dt$.



Conséquences 9.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Le volume de solide engendré par la rotation de la courbe représentative de f sur $[a; b]$, autour de l'axe des abscisses, exprimée en unité de volume, est le réel positif : $V = \int_a^b \pi (f(t))^2 dt$.



Cas particulier : Si f est une constante : par exemple $f(x) = R > 0$, le solide sera un cylindre son volume est : $V = \int_a^b \pi R^2 dt = [x\pi R^2]_a^b = (b-a)\pi R^2$ c'est le volume d'un cylindre de hauteur $h = b-a$ ($b > a$) et de base cercle de rayon R .

