

Calcul intégral et les équations différentielles

Exercice 01 : session de rattrapage 2022

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^4 (\ln x - 1)^2; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

- 1) On pose $I = \int_1^e x^4 (\ln x - 1) dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I = \frac{6 - e^5}{25}$
- 2) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = x^5 (\ln x - 1)^2$
Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4 (\ln x - 1)$
- 3) Dédurre que $\int_1^e f(x) dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5} I$
- 4) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Exercice 02 : session normale 2022

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)e^x$

- 1) a) Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I = \int_{-1}^0 h(x) dx$
b) A l'aide d'une intégration par parties calculer $J = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^x dx$
- 2) a) Résoudre l'équation différentielle $(E): y'' - 2y' + y = 0$
b) Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$

Exercice 03 : session de rattrapage 2021

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$

- 1) En utilisant une intégration par parties, calculer : $\int_0^2 xe^{-x} dx$
- 2) En déduire que $\int_0^2 f(x) dx = 4 - e + 3e^{-1}$

Exercice 04 : session normale 2021

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \ln x - 2x$ si $x > 0$

- 1) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln x dx = \frac{1+e^2}{4}$
- 2) En déduire : $\int_1^e f(x) dx$

Exercice 05 : session de rattrapage 2020

Soit v la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3$

- 1) Montrer que la fonction W définie par $W(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (4-2x)e^x - 3x$ est une primitive de la fonction v sur $\mathbb{R}$.
- 2) Calculer l'intégrale $\int_0^2 v(x) dx$

Exercice 06 : session normale 2020

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

- 1) Montrer que la fonction $G : x \mapsto x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$ est une primitive de g sur $]0; +\infty[$
- 2) Calculer l'intégrale $\int_1^4 g(x) dx$

Exercice 07 : session de rattrapage 2019

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

- 1) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ sur $[2; 4]$.
- 2) Vérifier que $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$
- 3) Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4} dx$.
- 4) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Exercice 08 : session normale 2019

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm). Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.

- 1) Montrer que la fonction $H : x \mapsto x - \ln x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
- 2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.
- 3) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 09 : session de rattrapage 2018

- 1) a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.
b) En déduire que $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$
- 2) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx$.

Exercice 10 : session normale 2018

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm). Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

- 1) Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$
puis en déduire que $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$
- 2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 xe^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 3) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.