1- التناسب - السلم

نقول أن a و b متناسبان على التوالي مع c و d إذا كان $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. (نضيف أيضا $\cdots=\frac{an}{cn}=\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$).

مثال 1 : كمية الصباغة اللازمة لصباغة حائط مساحته $20\,m^2$ هي $10\,kg$.

1. حدد الكمية اللازمة من الصباغة لصباغة حائط مساحته $30\,m^2$. 2. حدد المساحة الممكن صباغتها بواسطة $25\,kg$ من الصباغة .

الحل :

1. ليكن x كمية الصباغة . لدينا $\frac{x}{10}=\frac{30}{20}\iff x=\frac{10\times 30}{20}\iff x=15$ ومنه كمية الصباغة الممكنة هي $15\,kg$.

2. ليكن y المساحة الممكنة . لدينا $\frac{y}{25}=\frac{20}{10}\iff \frac{y}{25}=2\iff y=2\times 25\iff y=50$ ومنه المساحة الممكنة هي $50\,m^2$.

مثال 2 : إشترى أحمد سروالا وقميصا بمال قدره $105\,dh$. إذا علمت أن ثمني السروال والقميص متناسبان على التوالي مع 9 و 6 ، فحدد ثمن كل منهما .

الحل : ليكن x ثمن السروال و y ثمن القميص . لدينا $x+y=105$ و $\frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{x+y}{9+6}=\frac{105}{15}=7$.
إذن $\frac{x}{9}=7\iff x=7\times 9\iff x=63$ و $\frac{y}{6}=7\iff y=7\times 6\iff y=42$.
وبالتالي ثمن السروال هو $63\,dh$ وثمن القميص هو $42\,dh$.

مثال 3 : أحسب بوحدة km المسافة الحقيقية لطريق طولها على خريطة طرقية بسلم $\frac{1}{300000}$ هي $2.4\,cm$.

الحل : نعلم أن $1\,km=10^3\,m$ و $1\,m=10^2\,cm$ ومنه $1\,km=10^5\,cm$. لتكن d هي المسافة الحقيقية لهذه الطريق .
لدينا $d=300000\times 2.4\,cm=3\times 10^5\times 2.4\,cm=3\times 2.4\times 10^5\,cm=7.2\,km$.

2- النسبة المئوية

لتكن E مجموعة عدد عناصرها n و A جزء من E عدد عناصره m .
النسبة المئوية التي تمثلها A في E هي $p=\frac{m}{n}\times 100$ ، ونرمز لها ب $p\%$.

مثال 1 : يتكون قسم من 40 تلميذا وتلميذة ، من بينهم 22 أنثى . ما هي نسبة الإناث والذكور في القسم ؟

الحل : نسبة الإناث في القسم هي $\frac{22}{40}\times 100=55$ أي 55% ونسبة الذكور في القسم هي $100\%-55\%=45\%$.

مثال 2 : يتقاضى موظفا أجرة قدرها $4000\,dh$ شهريا ، يخصص منها 20% لأداء مستحقات كراء المسكن . ما هو مبلغ كراء مسكن هذا الموظف ؟

الحل : ليكن x مبلغ كراء المسكن . لدينا $x=4000\times 20\%=\frac{4000\times 20}{100}=800$ ومنه مبلغ كراء المسكن هو $800\,dh$.

ليكن x هو الكمية و $p\%$ نسبة التحفيض أو الزيادة .

- الكمية الجديدة بعد الزيادة في الكمية x بنسبة $p\%$ هي : $x+x\cdot p\%=x+\frac{x\cdot p}{100}$. (قيمة الزيادة هي $x\cdot p\%$)
- الكمية الجديدة بعد التخفيض في الكمية x بنسبة $p\%$ هي : $x-x\cdot p\%=x-\frac{x\cdot p}{100}$. (قيمة التخفيض هي $x\cdot p\%$)

مثال 1 : يبلغ ثمن تلفاز $7000\,dh$. علما أن هذا الثمن انخفض بنسبة 15% ، فما هو الثمن الجديد لهذا التلفاز ؟

الحل : قيمة التخفيض بالدرهم هي $7000 \cdot 15\% = \dfrac{7000 \times 15}{100} = 1050$.
ومنه الثمن الجديد للتلفاز هو $7000 - 1050 = 5950$ أي ثمنه هو $5950\,dh$.

مثال 2 : يبلغ ثمن ثلاجة $5000\,dh$. علما أن هذا الثمن ارتفع بنسبة 5% ، فما هو الثمن الجديد لهذه الثلاجة ؟

الحل : قيمة الزيادة بالدرهم هي $5000 \cdot 5\% = \dfrac{5000 \times 5}{100} = 250$.
ومنه الثمن الجديد للثلاجة هو $5000 + 250 = 5250$ أي ثمنها هو $5250\,dh$.

مثال 3 : يخصص تاجرا نسبة $\dfrac{2}{7}$ من ربحه البالغ $7000\,dh$ كأجرة لمساعده . ما هي أجرة المساعد ؟

الحل : أجرة المساعد بالدرهم هي : $7000 \times \dfrac{2}{7} = 2000$.

مثال 4 : ثمن سيارة مستعملة هو $50000\,dh$. انخفض ثمنها بنسبة 10% ، هل يمكن لشخص يملك $46000\,dh$ إقتناء هذه السيارة ؟

الحل : قيمة التخفيض بالدرهم هي $50000 \cdot 10\% = \dfrac{50000 \times 10}{100} = 5000$ ومنه الثمن الجديد للسيارة هو $50000 - 5000 = 45000$.
وبالتالي يمكن لهذا الشخص أن يقتني هذه السيارة .

3- معادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى

مثال 1 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1. $2x - 3 = 0$ 2. $3x + 4 = 5x - 2$ 3. $(6x - 1)(x - 5) = 0$ 4. $x^2 - 7x = 0$

الحل :

1. لدينا $2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = \dfrac{3}{2}$ ومنه $S = \{\frac{3}{2}\}$.
2. لدينا $3x + 4 = 5x - 2 \iff 5x - 3x = 4 + 2 \iff 2x = 6 \iff x = \dfrac{6}{2} \iff x = 3$ ومنه $S = \{3\}$.
3. لدينا $(6x - 1)(x - 5) = 0 \iff 6x - 1 = 0$ أو $x - 5 = 0 \iff x = \dfrac{1}{6}$ أو $x = 5$ ومنه $S = \{\frac{1}{6}, 5\}$.
4. لدينا $x^2 - 7x = 0 \iff x(x - 7) = 0 \iff x = 0$ أو $x = 7$ ومنه $S = \{0, 7\}$.

جدول إشارة التعبير $ax + b$ حيث $a \neq 0$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

مثال : جدول إشارة $2x - 3$ هو :

x	$-\infty$	$\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$	$-$	0	$+$

جدول إشارة $-3x + 5$ هو :

x	$-\infty$	$\dfrac{5}{3}$	$+\infty$
$-3x + 5$	$+$	0	$-$

4- معادلات ومتراجحات من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$. العدد $\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميز هذه المعادلة .

1. إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا وحيدا وهو $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

وجدول إشارة ax^2+bx+c على الشكل التالي :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a		0	إشارة a	

2. إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين هما $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

وجدول إشارة ax^2+bx+c على الشكل التالي : (نفترض أن $x_1<x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a		

3. إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

وجدول إشارة ax^2+bx+c على الشكل التالي :

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية :

1. $4x^2-4x+1=0$
2. $x^2+x-12=0$
3. $x^2+x+1=0$
4. $4x^2-4x+1\geq 0$
5. $x^2+x-12\leq 0$
6. $x^2+x+1>0$

الحل :

1. لدينا $4x^2-4x+1=0$ ومنه $a=4$ ، $b=-4$ و $c=1$ وبالتالي $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 4\times 1=16-16=0$.

إذن المعادلة $4x^2-4x+1=0$ تقبل حلا وحيدا وهو $x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-4)}{2\times 4}=\dfrac{4}{2\times 4}=\dfrac{1}{2}$.

2. لدينا $x^2+x-12=0$ ومنه $a=1$ ، $b=1$ و $c=-12$ وبالتالي $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times 1\times(-12)=1+48=49>0$.

إذن المعادلة $x^2+x-12=0$ تقبل حلين هما :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{49}}{2\times 1}=\dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ أو $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{49}}{2\times 1}=\dfrac{-1-7}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$.

3. لدينا $x^2+x+1=0$ ومنه $a=b=c=1$ وبالتالي $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times 1\times 1=1-4=-3<0$.

وبالتالي المعادلة $x^2+x+1=0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

4. جدول إشارة التعبير $4x^2-4x+1$ هو :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-4x+1$		$+$	0	$+$	

من خلال الجدول لدينا $\forall x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ وبالتالي حلول المتراجحة $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ هي : $S = \mathbb{R}$.

5. جدول إشارة التعبير $x^2 + x - 12$ هو :

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x^2 + x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من خلال الجدول لدينا $\forall x \in [-4, 3] : x^2 + x - 12 \leq 0$ وبالتالي حلول المتراجحة $x^2 + x - 12 \leq 0$ هي : $S = [-4, 3]$.

6. جدول إشارة التعبير $x^2 + x + 1$ هو :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + x + 1$	$+$	

من خلال الجدول لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0$ ومنه حلول المتراجحة $x^2 + x + 1 > 0$ هي $S = \mathbb{R}$.

5- النظمة

بالإضافة إلى طريقتي التعويض والتأليفة الخطية ، سنحل النظمة $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ باعتماد طريقة المحددة :

أولا نحسب المحددات التالية : $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ ، $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ و $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

1. إذا كان $D \neq 0$ فإننا نحسب $x = \dfrac{D_x}{D}$ و $y = \dfrac{D_y}{D}$ ومنه النظمة تقبل حلا وحيدا وهو الزوج (x, y) .
.
2. إذا كان $D = 0$ وكان $D_x = D_y = 0$ فإن النظمة تقبل ما لا نهاية من الحلول .
3. إذا كان $D = 0$ وكان $D_x \neq 0$ أو $D_y \neq 0$ فإن النظمة ليس لها الحل .

مثال :

1. حل النظمة التالية $\begin{cases} x + y = 20 \\ 7x + 4y = 104 \end{cases}$.
2. تحمل شاحنة 20 صندوقا من صنفين مختلفين A و B . كتلة كل الصندوق من الصنف A هي $28\ kg$ و من الصنف B هي $16\ kg$.
إذا علمت أن مجموع كتل الصناديق هو $416\ kg$ ، فحدد عدد الصناديق من كل صنف .

الحل :

1. باستعمال طريقة المحددة لدينا : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 7 = -3 \neq 0$.

و $D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 104 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 20 - 104 = 80 - 104 = -24$ و $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 7 & 104 \end{vmatrix} = 104 - 7 \times 20 = 104 - 140 = -36$

إذن $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-24}{-3} = 8$ و $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-36}{-3} = 12$ وبالتالي الزوج $(8, 12)$ هو حل هذه النظمة .

2. ليكن x عدد الصناديق من الصنف A و y عدد الصناديق من الصنف B . لدينا في المجموع 20 صندوقا وبالتالي : $x + y = 20$.
ونعلم أن مجموع كتل الصناديق هو $416\ kg$ وبالتالي : $28x + 16y = 416$ أي $7x + 4y = 104$.

إذن نحصل على النظمة التالية $\begin{cases} x + y = 20 \\ 7x + 4y = 104 \end{cases}$.

وحسب السؤال السابق لدينا $x = 8$ و $y = 12$ وبالتالي عدد الصناديق من الصنف A هو 8 ومن الصنف B هو 12 .

تمارين من الإمتحانات الجهوية :

التمرين 1

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3x^2 - 11x + 10 = 0$.
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2 - 11x + 10 < 0$.
3. أنشر ثم بسط التعبير $2x^2 - 4 - (x-1)(x+4)$.
4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2 - 4 = (x-1)(x+4)$.

التمرين 2

1. (ا) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3x + 35 = 80$.
(ب) يتوفر عزيز على مبلغ من المال قدره 80 درهما ، اشترى ثلاث دفاتر من نفس النوع وبقي عنده 35 درهما ، ما هو ثمن الدفتر الواحد ؟
2. (ا) حل النظمة التالية : $\begin{cases} 5x + 3y = 81 \\ x - y = 5 \end{cases}$.
(ب) أدى خالد مبلغا قدره 81 درهما مقابل 5 لترات من الزيت و 3 كيلوغرامات من السكر . علما أن اللتر الواحد من الزيت يفوق ثمن الكيلوغرام الواحد من السكر بخمسة دراهم ، أحسب ثمن اللتر الواحد من الزيت وثمن الكيلوغرام الواحد من السكر .
3. العدد الإجمالي لسكان إحدى المدن هو 75000 شخصا ، علما أن نسبة الأشخاص النشطين في هذه المدينة هي 40% من العدد الإجمالي للسكان ، أحسب عدد الأشخاص النشطين في هذه المدينة .

التمرين 3

1. حدد قيمتي العددين a و b بحيث 4 و a و 3.6 متناسبة على التوالي مع الأعداد 5 و 40 و b .
2. يحتوي نوع من الجبن على 15% من المواد الذهنية . حدد كتلة المواد الذهنية في 320 غرام من هذا الجبن .

التمرين 4

1. (ا) تحقق أن مميز المعادلة $2x^2 - 5x - 3 = 0$ هو $\Delta = 49$.
(ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2x^2(-5x - 3 = 0$.
(ج) أنشر وبسط الجداء $(2x+1)(x-3)$.
2. (ا) ضع جدول إشارة ثلاثية الحدود $2x^2 - 5x - 3$.
(ب) استنتج مجموعة حلول المتراجحة $2x^2 - 5x - 3 < 0$.

التمرين 5

1. حل النظمة التالية : $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x - 2y = 19 \end{cases}$.
2. أنفقت شركة مبلغ 1800 درهم لشراء مواد التنظيف ومواد التعقيم . ثمن مشتريات الشركة من مواد التنظيف يفوق ثمن مشترياتها من مواد التعقيم بمبلغ 200 درهم ، أحسب ثمن مشتريات مواد التنظيف .

التمرين 6

1. في إحدى الثانويات ، إجتاز 360 تلميذا الإمتحان الوطني لنيل شهادة البكالوريا ، فكانت نسبة النجاح 85% . حدد عدد الناجحين .
2. ليكن x عددا حقيقيا بحيث x و 5 متناسبان على التوالي مع 12 و 2 . حدد قيمة العدد x .
3. (ا) تحقق أن مميز المعادلة $x^2 + 2x - 15 = 0$ هو $\Delta = 64$.
(ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 + 2x - 15 = 0$.
(ج) ليكن x عددا حقيقيا ، تحقق أن $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$.
(د) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2 + 2x - 15 \leq 0$.

التمرين 7

1. حل النظمة التالية : $\begin{cases} x+y=70 \\ x+2y=100 \end{cases}$.

2. اشترى تاجر 100 كيلوغرام من التمر ، موزعة على 70 علبة ، صنف منها يسع كيلوغراما واحدا ، وصنف ثان يسع كيلوغرامين اثنين . حدد عدد علب التمر من كل صنف .

التمرين 8

1. نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3x^2+2x-5=0$.

(ا) بين أن مميز المعادلة هو $\Delta=64$.

(ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة .

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $3x^2+2x-5\geq 0$.

2. (ا) حل النظمة : $\begin{cases} x+3y=11 \\ 3x+y=17 \end{cases}$.

(ب) إشترت سكينة ثلاثة قطع شوكولاتة من نفس النوع ومشروب واحد بمبلغ 55 درهم ، بينما أدت زميلتها 85 درهم مقابل قطعة شوكولاتة واحدة من نفس النوع وثلاثة مشروبات من نفس نوع مشروب سكينة .
حدد ثمن قطعة الشوكولاتة وثمن المشروب الواحد .

التمرين 9

أعلن متجر لبيع الملابس الجاهزة عن تخفيضات للأثمنة كالتالي :

- تخفيض بنسبة 30% على الملابس التي يقل ثمنها عن 100 درهم .
- تخفيض بنسبة 25% على أثمنة باقي الملابس .

1. إعط الثمن بعد التخفيض ، لقميص كان ثمنه قبل التخفيض 90 درهما .

2. ما هو الثمن قبل التخفيض ، لسروال أصبح ثمنه بعد التخفيض 165 درهما .

التمرين 10

1. نضع $P(x)=x^4-2x^3-9x^2+2x+8$.

(ا) تحقق من أن : $P(x)=(x^2-1)(x^2-2x-8)$.

(ب) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2-2x-8=0$.

(ج) استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة $P(x)=0$.

(د) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2-2x-8<0$.

2. حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة : $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 2x+y=12 \end{cases}$.

3. الراتب الشهري لموظف هو 5000 درهم ، يؤدي منه 1200 درهم كواجب شهري لكراء شقة . حدد النسبة المئوية التي يمثلها واجب الكراء من راتب هذا الموظف .

التمرين 11

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين : $x^2+4x+3=0$ و $3x^2-4x+5=0$.

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين : $x^2+x-2\leq 0$ و $x^2-6x+9\geq 0$.

3. حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة : $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 2x-y=2 \end{cases}$.

4. يزيد عدد الإناث عن عدد الذكور بأحد الأقسام ب 6 تلميذات ، توفق جميع تلميذات وتلاميذ هذا القسم في الحصول على المعدل في المراقبة المستمرة باستثناء تلميذ واحد و 3 تلميذات .
إذا علمت أن عدد تلاميذ هذا القسم ذكورا وإناثا الحاصلين على المعدل في المراقبة المستمرة يساوي 28 .

(ا) بين أن مجموع تلاميذ هذا القسم ذكورا وإناثا يساوي 32 .
(ب) حدد عدد التلميذات وحدد عدد التلاميذ الذكور بهذا القسم .

5. نجح 270 مترشحا في امتحانات البكالوريا بإحدى المناطق . حدد نسبة النجاح في امتحانات البكالوريا بهذه المنطقة ، علما أن عدد المترشحين بهذه المنطقة قد بلغ 375 مترشحا .

التمرين 12

1. نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E) : 7x - 35 = 0$. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E) .

2. للعمل بالإجراءات الإحترازية المتعلقة بجائحة كورونا ، إشترت سارة 7 كمامات وقناعا واقيا . أدت من أجل ذلك 75 درهما .
علما أن ثمن القناع الواقي هو 40 درهما ، حدد ثمن الكمامة الواحدة .

التمرين 13

1. نعتبر المعادلة (F) المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $(F) : 5x^2 - 4x - 1 = 0$.

(ا) تحقق أن مميز المعادلة (F) هو $\Delta = 36$.
(ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (F) .
(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $5x^2 - 4x - 1 \leq 0$.

2. حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة : $\begin{cases} x + 5y = 18 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$.

3. بمناسبة الدخول المدرسي الجديد ، أعلن صاحب مكتبة تخفيضا نسبته 15% . حدد الثمن الجديد لكتب مدرسية ثمنها قبل التخفيض 800 درهم .

التمرين 14

1. مجموع تلاميذ وتلميذات إحدى الثانويات هو 1640 . أحسب عدد الذكور بهذه المؤسسة إذا علمت أن نسبة الإناث بها هي 35% .

2. نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2 + 7x + 5 = 0$.

(ا) تحقق أن مميز المعادلة هو $\Delta = 9$.
(ب) استنتج حلي هذه المعادلة .
(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $2x^2 + 7x + 5 \leq 0$.

3. (ا) حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية $\begin{cases} x + y = 38 \\ x + 2y = 55 \end{cases}$.

(ب) تحتوي عمارة سكنية على 38 شقة من صنفين : شقق من غرفتين وشقق من أربع غرف .
حدد عدد الشقق من كل صنف علما أن العدد الإجمالي للغرف بهذه العمارة هو 110 .