

Calcul vectoriel dans le plan

Académie :
Casablanca-Settat

Direction
provinciale : Settat

Les capacités attendues

Contenus

- ✓ Construire un vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$.
- ✓ Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine en utilisant l'outil vectoriel et réciproquement.
- ✓ Résoudre des problèmes géométriques en utilisant l'outil vectoriel.

- ✓ Egalité de deux vecteurs ; somme de deux vecteurs ; relation de Chasles.
- ✓ Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.
- ✓ Colinéarité de deux vecteurs, alignement de trois points.
- ✓ Définition vectorielle du milieu d'un segment

Etablissement :
LYCEE SID HAJJAJ

Pr : Y. Achab

Niveau : TCSF

Durée : 5 heures

Degré d'importance
25%

Le contenu

Remarques

I. Egalité de deux vecteurs-Somme de deux vecteurs

Activité 1.

Soient A, B, C et D quatre points du plan

- 1) Construire les points E et F tels que $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AD}$ et $\vec{AF} = \vec{AC} + \vec{AD}$
- 2) Montrer que $\vec{EF} = \vec{BC}$; puis déduire la nature du quadrilatère $EFCB$

Propriété

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, même sens et même norme(on note la norme d'un vecteur \vec{u} par $\|\vec{u}\|$).
- Soient A, B, C et D quatre points du plan, on a :
 - ✓ $\vec{AB} = \vec{DC}$ Signifie que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
 - ✓ $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ Signifie que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
 - ✓ $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$: **Relation de Chasles**
 - ✓ Si on a A et B deux points confondus alors $\vec{AB} = \vec{AA} = \vec{BB} = \vec{0}$

Application 1

- 1) Soient A, B et C trois points non alignés construire les points D et E définis par $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC}$ et $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{CA}$
- 2) Simplifier les vecteurs suivants : $\vec{u} = \vec{BC} + \vec{AB} - \vec{AC} - \vec{BA}$
- 3) Soient A, B, C, D et E des points du plan. Montrer que : $\vec{AC} - \vec{DB} + \vec{CE} + \vec{DA} + \vec{EB} = \vec{0}$

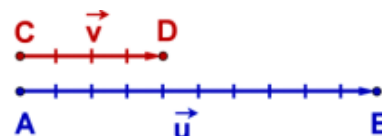
Exercice 1

- 1) Montrer que $\vec{AD} = \vec{BC}$ signifie que $\vec{AB} = \vec{DC}$.
- 2) Soient A, B et C trois points non alignés .Exprimer, en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} seulement, les vecteurs suivants : $4\vec{AB} - 3\vec{AC} - 2\vec{BA}$; $3\vec{AB} - 3\vec{AC} - 2\vec{BC}$

II. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

Activité 2.

- 1) Trouver la relation qui existe entre les vecteurs : $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{CD}$
- 2) Construire un vecteur \vec{w} tel que $\vec{w} = -2\vec{v}$



Définition :

Soit \vec{u} un vecteur et soit k un nombre réel non nul ($k \neq 0$).

La multiplicité du vecteur \vec{u} par k est le vecteur qu'on note $k\vec{u}$ ou $k.\vec{u}$ telle que :

- Si $k > 0$ alors les vecteurs \vec{u} et $k\vec{u}$ ont même sens et $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$
- Si $k < 0$ alors les vecteurs \vec{u} et $k\vec{u}$ ont même sens $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$

Exemple

Soient A et B deux points distincts. on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\|\vec{u}\| = 2 \text{ cm}$

Construisons les vecteurs : $2\vec{u}$; $\frac{1}{4}\vec{u}$; $-3\vec{u}$; $\frac{3}{4}\vec{u}$

Application 2

ABC un triangle et soient M, N et Q trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Construire une figure convenable

Propriété

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan et soient a et b deux nombres réels on a :

$$\checkmark a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v} \quad ; \quad (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u} \quad ; \quad a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$

$$\checkmark 1\vec{u} = \vec{u} \quad ; \quad k\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (k=0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$$

Exemple

$$\bullet 5\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \bullet 2(-3\overrightarrow{AB}) = -6\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \bullet 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$$

$$\bullet 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ signifie que } \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ car } 3 \neq 0$$

Application 3

1) Simplifier les expressions vectorielles suivantes :

$$\vec{A} = 2(\vec{u} + 5\vec{v}) + 3(\vec{u} - \vec{v}) \quad ; \quad \vec{B} = 18\vec{u} + 3(-\vec{u} + 4\vec{v}) + 2\vec{v} \quad ; \quad \vec{C} = \vec{u} + 7(2\vec{u} + \vec{v}) - 2(\vec{u} - 4\vec{v})$$

2) Soit x un nombre réel et soit \vec{u} un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) ; tels que $2x\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$

Déterminer la valeur de x

III. Colinéarité de deux vecteurs – Alignement de trois points.

Activité 3.

Soit ABC un triangle et soient D et E deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

- 1) Construire une figure convenable.
- 2) Dédire la relation vectorielle entre les deux vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AE}
- 3) Que peut-on dire sur les points A, D et E .

Propriété

➤ Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

✓ On dit que \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel non nul k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

➤ Soient A, B et C trois points du plan.

✓ On dit que les points A, B et C sont **alignés** si et seulement les \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont **colinéaires**.

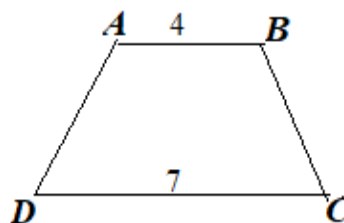
Exemple

✓ Considérons le trapèze suivant :

On remarque que $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{7}\overrightarrow{DC}$, ce qui entraîne à dire que les

vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont colinéaires.

✓ L'écriture $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ signifie que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires. Par suite les points les points A, B et C sont **alignés**



Application 4

ABC un triangle et soient D et E deux points tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

- 1) Construire la figure convenable.
- 2) Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- 3) Dédire la relation vectorielle entre \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AD}
- 4) Que peut-on dire sur l'alignement des points A, E et D

Exercice 2

Soient ABC un triangle. On considère les points M ; N et P définis par : $2\overline{MA} - 3\overline{MB} = \vec{0}$; $3\overline{NB} = 2\overline{CN}$ et $\overline{PA} + \overline{PC} = \vec{0}$.

- 1) Montrer que : $\overline{AM} = 3\overline{AB}$ et $\overline{AN} = \frac{3}{5}\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AC}$.
- 2) Montrer que : $\overline{MN} = -\frac{12}{5}\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AC}$ et $\overline{MP} = -3\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$.
- 3) En déduire que les vecteurs \overline{MP} et \overline{MN} sont colinéaires. Que peut-on dire des points M ; N et P
- 4) Soit K le point défini par : $3\overline{MK} - 2\overline{MC} = \vec{0}$
 - a-Exprimer le vecteur \overline{AK} en fonction des vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} .
 - b-montrer que les points A ; N et K sont alignés
- 5) montrer que $(BK) // (AC)$

IV. Milieu d'un segment :

Propriété 1

Soient A , B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment $[AB]$, si et seulement si $\overline{AI} = \overline{IB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Application 5

Soit ABC un triangle et I le point défini par : $2\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{AC}$

Montrer que I est le milieu de $[BC]$

Propriété 2

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M du plan (P) : $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$

Application 6

Soit A ; B et C trois points et I le milieu de $[AB]$ le point défini par : $2\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{AC}$

Montrer que $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{CI}$

Exercice 3

ABC est un triangle.

Soit M , N et P sont les points définis par : $3\overline{AM} = 2\overline{AB}$, $3\overline{AN} - \overline{AC} = \vec{0}$ et $3\overline{AP} - 3\overline{AB} = -\overline{BC}$

- 1) Montrer que : $\overline{MN} + \overline{MP} = -2\overline{AM} + \overline{AN} + \overline{AP}$
- 2) En déduire que M est le milieu du segment $[NP]$

Exercice 4

Soit $ABCD$ un parallélogramme, I et J les milieux respectifs des segment $[AB]$ et $[DC]$.

Soit P et M les points définis par : $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AJ}$ et $\overline{BP} = -\frac{1}{6}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD}$

- 1) Faire une figure et placer les points I ; J ; P et M
- 2) Montrer que : $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$
- 3) En déduire la nature du quadrilatère $IBPM$

Exercice 5

$ABDC$ est un parallélogramme et E et F deux points du plan tels que : $\overline{CF} = 2\overline{AC}$; $\overline{AE} = \frac{3}{2}\overline{AB}$

- 1) Construire une figure convenable.
- 2) Montrer que $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{BD}$ et $\overline{DF} = 2\overline{BD} - \overline{AB}$.
- 3) Déterminer le nombre réel k tel que $\overline{DE} = k\overline{DF}$. Déduire que les points E , F et D sont alignés.
- 4) Soit I le milieu du segment $[CF]$ et J un point du plan tel que $\overline{AB} = \overline{BJ}$.
 - a) Montrer D est le milieu du segment $[IJ]$.
 - b) Montrer que $(IJ) // (BC)$.