



Examen simili de mathématiques
2^{ème} bac sciences économiques

Année scolaire : 2023/2024
Durée : 2 heures
Coefficient : 4

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est interdite.

COMPOSITION DU SUJET

Exercice 1 Exercice 2	Suites numériques	1.75 +2.5 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	4.25 points
Exercice 4	Etude d'une fonction numérique et calcul intégral	12 points

EXERCICE1:(1.75pts)

On considère la suite numérique (w_n) définie par : $w_0 = 6$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_{n+1} = \frac{6w_n + 4}{w_n + 6}$

- 1) Calculer w_1 (0.25pt)
- 2) Montrer par récurrence que : pour tout n de $\mathbb{N}$ $w_n > 2$ (0.5pt)
- 3) a - Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_{n+1} - w_n = \frac{(w_n + 2)(2 - w_n)}{w_n + 6}$ (0.5pt)
- b- Dédurre que (w_n) est une suite décroissante et qu'elle est convergente. (0.5pt)

EXERCICE 2 : (2.5pts)

Une personne a ouvert un compte bancaire avec un montant de 30000 dirhams le 1er Janvier 2024.

Soit u_n la Valeur du capital de cette personne sur ce compte au 1^{er} Janvier de l'année $(2024 + n)$.

D'une année à la suivante, la banque fait bénéficier ce client d'une augmentation de 5% puis lui retire 500dh.

- 1) Expliquer pourquoi $u_0 = 30000$ et $u_{n+1} = 1,05u_n - 500$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (0.25pt)
- 2) On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = u_n - 10000$ pour tout n de $\mathbb{N}$
 - a) Calculer u_1 et v_0 . (0.5pt)
- 2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$ (0.5pt)
- 3) Exprimer v_n en fonction de n . (0.25pt)
- 4) Dédurre que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_n = 10^4 \left(2(1,05)^n + 1 \right)$ et Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0.5pt)
- 5) a-Interpréter u_1 (0.25pt)
- b- A partir de quelle année le capital de cette personne sur le compte bancaire dépassera-t-il 50000 dirhams ? (0.25pt)

EXERCICE 3 :(4.25pts)

Une urne contient quatre boules blanches numérotées 1;2;2;2 et six boules rouges numérotées 0;0;0;2;2;2 (les boules sont indiscernables au toucher)

1) On tire au simultanément et hasard trois boules de l'urne,

On considère les évènements suivants :

A : « les trois boules tirées sont de même couleur »

B : « les trois boules tirées portent le même numéro ».

C : « Le produit des numéros des trois boules tirées est nul »

D : « les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même numéro ».

a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$ (1.5 pts)

b. Les deux évènements A et B sont-ils indépendants ? (0.5pt)

c. Exprimer l'évènement D en fonction de deux évènements de cet exercice puis

montrer que $p(D) = \frac{1}{40}$ (0.75pt)

d. Sachant que les boules tirées sont de même couleur, calculer la probabilité qu'elles portent le même numéro (0.5pt)

2) On tire au hasard une boule de l'urne. Si cette boule est blanche alors on la met de côté puis on tire successivement et avec remise deux boules ; mais si la boule tirée est rouge alors on la remet dans l'urne puis on tire successivement et sans remise deux boules de la même urne.

Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges et une boule blanche (1pt)

EXERCICE 4 : (11.5pts)

A) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} : g(x) = (x-2)e^{-x}$

1. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (0.5pt)

2.a- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} : g'(x) = (3-x)e^{-x}$ (0.5pt)

b- Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g (0.75pt)

3.a- Calculer $g(2)$ et déduire que $g(x) \leq 0$ sur l'intervalle $]-\infty; 2]$. (0.5pt)

b- Déterminer $g([2; 3])$ et $g([3; +\infty[)$ puis déduire que $g(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[2; +\infty[$ (0.75)

B) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2(1-x)e^{-x} - 1$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1.a- Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R} : f(x) = 2\left(\frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x}\right) - 1$ (0.5pt)

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat. (0.75pt)

2.a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. (0.5pt)

b- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{e^x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) - \frac{1}{x}$ (0.5pt)

c Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement ce résultat. (0.75pt)

3)a- Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R} : f'(x) = 2g(x)$ (1pt)

b- Déduire que f est décroissante $]-\infty; 2]$ et que f est croissante sur $[2; +\infty[$. (0.75pt)

c Dresser le tableau de variations de f . (0.5pt)

4) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0. (0.5pt)

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]0; \frac{1}{2}\right]$. (0.5pt)

6) Calculer $f''(x)$ et montrer que (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 3 (0.5pt)

7) a. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^2 (1-x)e^{-x} dx = \frac{3}{e^2} - \frac{1}{e}$ (1pt)

b- Déterminer l'aire de la partie hachurée .
(0.75pt)

