

I) Dénombrement.**1) Cardinal d'un ensemble fini****Définition :**

Soit E un ensemble fini de n éléments distincts $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$

On appelle cardinal de E son nombre d'éléments n et on

écrit $\text{Card}(E) = n$

Exemples :

Considérons les deux ensembles $A = \{1; 2; 2\}$ et $B = \{a; b; c; d\}$

On a $\text{Card}(A) = 3$ et $\text{Card}(B) = 4$

L'ensemble vide ne contient aucun élément, donc $\text{Card}(\emptyset) = 0$

2) Principe fondamental de l'analyse combinatoire.**Activité :**

On se propose de déterminer le nombre de nombres à deux chiffres, que l'on peut écrire avec les chiffres 3, 5 et 7.

Sans répétition d'un même élément

Le nombre des issues pour choisir le chiffre des dizaines est 3.

Le nombre des issues pour choisir le chiffre des unités est 2.

Donc le nombre de nombres à 2 chiffres que l'on peut écrire avec les chiffres 3, 5 et 7 est $6 = 3 \times 2$.

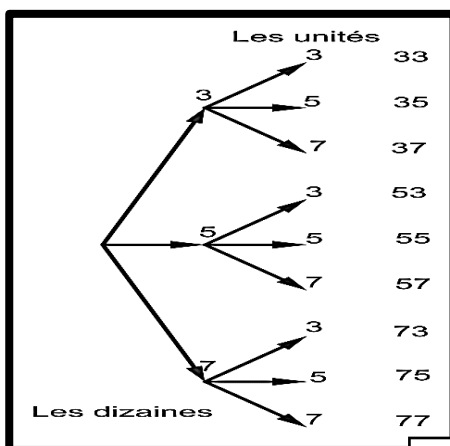
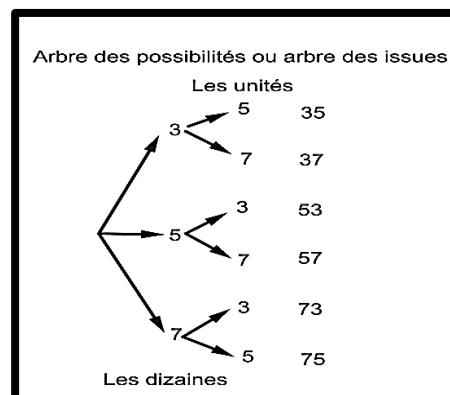
Avec répétition d'un même élément.

Le nombre des issues pour choisir le chiffre des dizaines est 3.

Le nombre des issues pour choisir le chiffre des unités est 3.

Donc le nombre de nombres à 2 chiffres que l'on peut écrire avec les chiffres 3, 5 et 7 est

$$9 = 3 \times 3 = 3^2.$$

**Définition.**

Soit E une expérience dont les résultats nécessitent k choix,

Si le premier choix se fait de n_1 façons différentes

Le deuxième choix se fait de n_2 façons différentes, ...,

.....

Le $k^{\text{ième}}$ choix se fait de n_k façons différentes,

Alors le nombre de résultats possibles est donné par le produit :

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k.$$

Exemple 1

Un code comporte deux lettres distincts suivies d'un chiffre non nul

Combien peut-on former de codes distincts ?

Les trois étapes : choix de la première lettre : 26 possibilité, de la deuxième 25 possibilités, puis du chiffre de 9 possibilités

Le nombre cherché est donc : $26 \times 25 \times 9 = 5850$

Exemple 2

Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- ✚ Une entrée à choisir parmi 3 entrées possibles notée E_1, E_2, E_3
- ✚ Un plat à choisir parmi 4 plats possibles notés P_1, P_2, P_3 et P_4 .
- ✚ Un dessert à choisir parmi 5 desserts possibles notés D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5 .

Combien un client peut-il composer de menus différents ? Sachant qu'un menu contient une entrée, un plat et un dessert.

Le nombre de possibilités pour choisir l'entrée est 3.

Le nombre de possibilités pour choisir le plat est 4.

Le nombre de possibilités pour choisir le dessert est 5.

Donc d'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire le nombre des résultats possibles est $3 \times 4 \times 5 = 60$.

D'où un client peut composer de 60 menus différents.

Exercice 01.

1) Combien peut-on former de codes de téléphone à 4 chiffres ?

2) Combien peut-on former de codes de téléphone à 4 chiffres ne comportant pas le chiffre 0.



3) Arrangements.

a) Arrangements sans répétition.

Activité.

Dans une course de semi-marathon, formée de 10 participants.

On suppose que la course est sans ex-æquo.

On s'intéresse aux 4 premiers rangs.

Déterminer le nombre de résultats possibles.

✚ La 1^{ière} place : 10 possibilités.

✚ La 2^{ième} place : 9 possibilités.

✚ La 3^{ième} place : 8 possibilités.

✚ La 4^{ième} place : 7 possibilités.

Donc d'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire le nombre des résultats possibles est $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

Chaque résultat est appelé un arrangement sans répétition de 4 éléments pris par 10.

Le nombre de résultats est noté A_{10}^4 , et on a :

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

Définition.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

- ✓ Tout rangement de p éléments choisis parmi n éléments (sans possibilité de répétition d'un même élément) est appelé arrangement sans répétition de p éléments parmi n ($1 \leq p \leq n$)
- ✓ Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments pris parmi par n est noté A_p^n , et on a :

$$A_p^n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1).$$

Exemples.

Calculons A_6^2 , A_5^2 et A_5^3 .

$$A_6^2 = 6 \times 5 = 30,$$

$$A_5^2 = 5 \times 4 = 20,$$

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = A_5^2 \times 3 = 20 \times 3 = 60.$$

b) Arrangements avec répétition.

Activité.

On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie. Le coté face est noté F, et le coté pile est noté P.

Déterminer le nombre d'issues possibles.

✚ Le 1^{ier} lancer : 2 issues.

✚ Le 2^{ième} lancer : 2 issues.

✚ Le 3^{ième} lancer : 2 issues.

Donc d'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire le nombre des résultats possibles est

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3.$$

Chaque résultat est appelé un arrangement avec répétition de 3 éléments pris par 2.

Définition.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

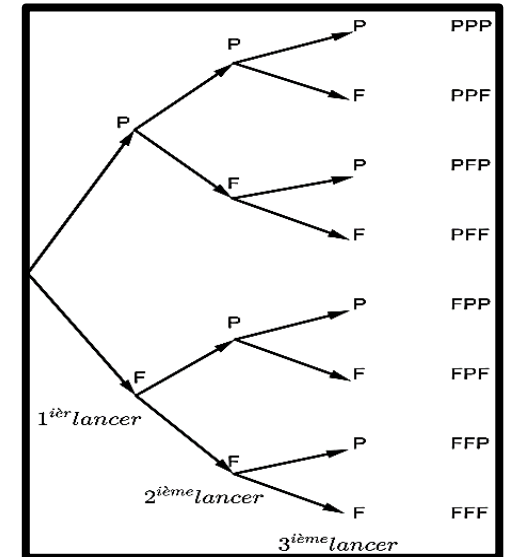
- ✓ Tout rangement de p éléments choisis parmi par n éléments (avec possibilité de répétition d'un même élément) est appelé arrangement avec répétition de p éléments parmi n.
- ✓ Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments pris parmi par n est noté n^p .

Exemple.

On lance 2 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on s'intéresse au numéro porté par la face supérieure du dé (à la position d'équilibre).

Déterminons le nombre d'issues possibles.

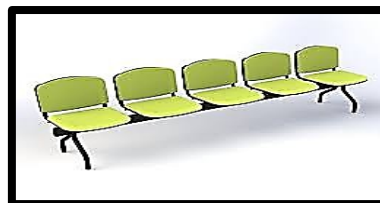
Le dé contient 6 faces numérotées de 1 à 6. Chaque résultat est un arrangement avec répétition de 2 éléments pris parmi 6, donc le nombre de résultats possibles est $6^2 = 36$.



c) Permutations.**Activité.**

De combien de façons 5 enfants peuvent-ils s'asseoir sur un siège à 5 places.

- ✚ La 1^{ière} place : 5 possibilités.
- ✚ La 2^{ième} place : 4 possibilités.
- ✚ La 3^{ième} place : 3 possibilités.
- ✚ La 4^{ième} place : 2 possibilités.
- ✚ La 5^{ième} place : 1 possibilité.



Donc d'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire le nombre des résultats possibles est $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Chaque résultat est un arrangement sans répétition de 5 éléments pris parmi 5.

Dans ce cas chaque résultat est appelé une permutation de 5 éléments.

Le nombre des permutations de 5 éléments est noté $5!$, et on a : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Définition.

Soit n un entier naturel non nul.

- ✓ Tout arrangement sans répétition de n éléments est appelé permutation n éléments.
- ✓ Le nombre permutations de n éléments est noté $n!$, se lit factorielle n , et on a : $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

Exemples.

Calculons ce qui suit : $4!$, $5!$, $6!$, A_7^5 et $\frac{7!}{(7-5)!}$.

On a : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$,

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$,

$6! = 6 \times 5! = 6 \times 120 = 720$,

$A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$, et

$$\frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520.$$

On remarque que : $A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!}$

Remarques.

- ✓ On pose par convention $0! = 1$.
- ✓ Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que : $p \leq n$,

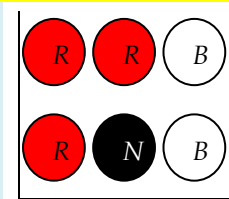
$$\text{On a : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^n = n!.$$

$$A_n^1 = n.$$

Exercice 02

I) Une urne contient 6 jetons : 3 rouges, 2 blancs et 1 noir.



On tire au hasard successivement et sans remise 2 jetons de l'urne (c'est-à-dire on tire un jeton, on note sa couleur, sans le remettre dans l'urne. On répète 2 fois de suite cette opération).

- 1 Déterminer le nombre de tirages possibles.
- 2 Déterminer le nombre de tirages permettant d'avoir :
 - a. 2 jetons rouges.
 - b. 2 jetons blancs.
 - c. 2 jetons de même couleur.
 - d. 2 jetons de couleurs différentes
 - e. 1 jeton rouge et 1 jeton noir.
 - f. Au moins 1 jeton blanc.
 - g. Le premier jeton blanc.

II) On tire au hasard successivement et avec remise 2 jetons de l'urne (c'est-à-dire on tire un jeton, on note sa couleur, puis on le remet dans l'urne. On répète 2 fois de suite cette opération).

Répondre aux questions précédentes.

4) **Combinaisons.****Activité.**

On veut choisir deux délégués d'une classe de 2^{ème} année du baccalauréat, parmi les quatre élèves Ahmed (A), Laila (L), Hanan (H), et Soufiane (S). Exemple : si on choisit Ahmed, Laila, on représente ce choix par {A; L}.

L'ensemble {A; L} est appelé combinaison de 2 éléments choisis parmi 4.

Donner, dans ce cas toutes les combinaisons de 2 éléments parmi 4. Quel est leur nombre ?

Le nombre de combinaisons de 2 éléments choisis parmi 4 est noté C_4^2

Définition.

Soit n un entier naturel, et soit E un ensemble contenant n éléments.

✓ Toute partie de E formée de p éléments de E ($0 \leq p \leq n$) est appelée combinaison de p éléments de E .

✓ Le nombre de combinaison de p éléments de E pris parmi n éléments est noté C_n^p , et on a :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Exemples.

1) Calculons : C_5^3 , C_6^4 , et C_9^5 .

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = 15$$

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 7 \times 2 = 126$$

2) Déterminons le nombre de sous-ensembles à 3 éléments de l'ensemble $E = \{a; b; c; d; e; f; g\}$.

Chaque sous-ensemble de 3 éléments de E est une combinaison de 3 éléments pris parmi 7.

Alors le nombre de combinaisons de 3 éléments de E est :

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$$

Exercice 03

Un sac contient 9 boules : 4 blanches, 3 rouges, et 2 noirs.

On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac

1) Déterminer le nombre de résultats possibles.

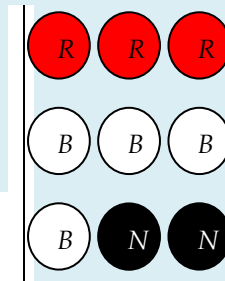
2) Déterminer le nombre de tirages permettant d'avoir :

a) Les Boules sont de même couleur.

b) Une boule de chaque couleur.

c) Au moins 1 boule rouge.

d) Au plus 2 boules rouges

**5) Importance de l'ordre.**

Type de tirage	Nombre de tirages possibles	Importance de l'ordre
Avec remise	n^p	Important
Sans remise	A_n^p	Important
Simultané	C_n^p	Sans importance

Propriété.

Si p est le nombre de boules tirées tel que : p_1 est le nombre de boules de 1^{er} type, p_2 est le nombre de boules de 2^{ème} type et p_3 est le nombre de boules de 3^{ème} type, alors le coefficient d'ordre

$$\text{est: } \frac{p!}{p_1! \times p_2! \times p_3!}$$