

Durée : 2 heures

○ **Exercice 01: (03 pts)**

3

✓ Calculer la dérivée de la fonction : $f : x \mapsto \sin(\pi x) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Puis en déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(\pi x) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}$.

○ **Exercice 02: (07 pts)**

2

⇒ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{**}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{**}), f(x) = \frac{ax^2 + (a^2 - 3a)x + 1}{ax} \quad \text{Où } a \in \mathbb{R}^{**}.$$

1)- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

1,5

2)- a)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{**}), f'(x) = \frac{(\sqrt{a} \cdot x + 1)(\sqrt{a} \cdot x - 1)}{ax^2}$.

1

b)- Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse.

1

3)- Vérifier que : $a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 2 = (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)^2$.

1,5

4)- Déduire de ce qui précède que : $(\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}^{**})^3), abc = 1 \Rightarrow a + b + c \geq 3$.

○ **Exercice 03: (10 pts)**

1

⇒ On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{2x-x^2}.$$

1)- Vérifier que $D_f = [0, 2]$.

1,5

2)- a)- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

1,5

b)- La fonction f est-elle dérivable à gauche en $x_0 = 2$? justifier votre réponse puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3)- Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0, 2[$ et que :

2

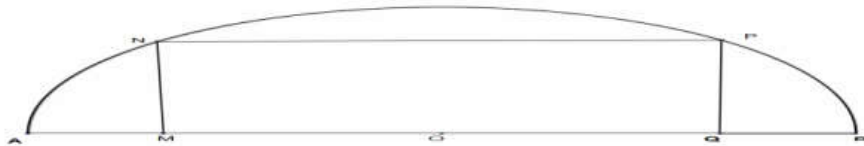
$$(\forall x \in]0, 2[), f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

1,5

4)- Dresser le tableau de variation de f en justifiant soigneusement votre réponse.

Durée : 2 heures

5)- On considère un demi cercle (C) de centre O et de diamètre $[AB]$ avec $AB = 2$.
 M est un point variable du segment $[OA]$ avec $M \neq O$ et $M \neq A$. N et P sont
Deux points du demi cercle (C) et Q un point du segment $[OB]$ tes que $MNPQ$
Est un rectangle . On pose : $x = AM$ et on désigne par $S(x)$ la surface de $MNPQ$.



2,5

✓ Montrer que : $(\forall x \in]0,1[), S(x) = 2.f(x)$, puis en déduire la position du
Point M pour la quelle la surface du rectangle $MNPQ$ est maximale .

● **Exercices Bonus:**

○ **Exercice 01: (03 pts)**

3

✓ Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ tels que :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), f(x + y^4) = y^3 \cdot f(y) + f(x) .$$

○ **Exercice 02: (03 pts)**

3

$\Rightarrow$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$.

✓ Montrer qu'il existe une droite (Δ) et une seule , dont on précisera l'équation
Tangente à la courbe (C_f) en deux points distincts .

○ **Exercice 03: (03 pts)**

3

$\Rightarrow$ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) \geq k , \text{ Où } k \in \mathbb{R}^{**} .$$

✓ Montrer que : $(\forall x \geq 0), f(x) \geq kx + f(0)$ et $(\forall x \leq 0), f(x) \leq kx + f(0)$

Puis en déduire chacune des deux limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Fin Du Sujet.