

EXERCICE 01

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{4 - x}}{x - 1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x - \sqrt{x} + 1} - \sqrt{x - 1} \right); \lim_{x \rightarrow 0^+} x E \left(\frac{4}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x - 3} + x^2 - 9}{x - 3}; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2020} \left[\frac{x}{x - 1} - \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{2020}} \right) \right]; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x^4 + x^5 - 3}{x^3 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 1} - \sin(x - 1) - \sqrt{2}}{(x - 1) \cos(x - 1)}; \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{1}{(x + \pi)^2} \left(1 - \sqrt{\frac{\cos^2 x}{2 + \cos x}} \right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\sqrt{x})}{x + 1}$$

2) Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - 3x + 5}{4x + 7}$$

EXERCICE 02

Soit $a \in]0; +\infty[$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(ax)}{x^2} = \frac{na^2}{2}$$

2) En déduire la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^5(\sqrt{13}x)}{1 - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{31}}\right)}$$

EXERCICE 03

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1 + x)\sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Étudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0 = 0$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

3) Étudier la dérivabilité à gauche de la fonction f au point $x_1 = 1$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

