

Exercice 1 :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x - 2x - 6$

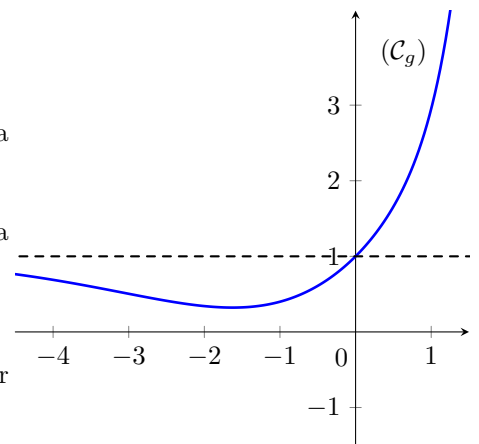
- 1 - a) Calculer $h'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire que $h'(0) = 0$.
 b) Montrer que $h''(x) = x^2 e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la monotonie de la fonction h' .
 c) Montrer que $h'(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^-$ et $h'(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.
 d) Montrer que $h(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- 2 - a) Vérifier que $h(x) = x^2 e^x - 4x(e^x - 1) + 6(e^x - x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
 b) En déduire que $e^x - x - 1 \geq \frac{-x^2 e^x}{6} + \frac{2x(e^x - 1)}{3}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- 3 - a) Vérifier que $h(-x) = \frac{x^2 + 2x(e^x - 1) - 6(e^x - x - 1)}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
 b) En déduire que $e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{6} + \frac{x(e^x - 1)}{3}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- 4 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 :

Partie I : Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{2x} - (x^2 + 1)e^x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = e^x - x - 1$$

- 1 - A partir de la courbe représentative $(\mathcal{C}_g)$ de la fonction g (voir la figure ci-contre) : étudier le signe de $g(x)$.
- 2 - a) Calculer $h'(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, puis étudier la monotonie de la fonction h .
 b) Montrer que $e^x - x \geq 1$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.
 c) A partir du signe de $h(-x)$, montrer que $xe^x + 1 \geq e^x$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.



Partie II : Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \ln(e^x - x) - \ln(xe^x + 1)$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$

- 1 - Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et que f est impaire.
- 2 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x} = 0$.
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 d) En déduire la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
- 3 - a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(xe^x + 1)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x - x)}{x} = 0$.
 b) Déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat.
 c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
- 4 - a) Montrer que $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - x)(xe^x + 1)}$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
 b) En déduire la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
- 5 - a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
 b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$.
 c) Montrer que la fonction f^{-1} est impaire.
- 6 - Construire $(\mathcal{C}_f), (\mathcal{C}_{f^{-1}})$ et la droite $(\mathcal{T})$ dans le même repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
 (On admettra que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ possède un point d'inflexion dont l'abscisse est 0).

Exercice 3 :

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)e^{-x}$

- 1 - Montrer que $g'(x) = -xe^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g dans $\mathbb{R}$.
- 2 - a) Comparer x et $\frac{1}{x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
- b) Montrer que $g\left(\frac{1}{x}\right) \geq g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$
et que $g\left(\frac{1}{x}\right) \leq g(x)$ sur chacun des intervalles $[-1, 0[$ et $]0, 1]$.

Partie II : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{-x} + xe^{\frac{-1}{x}} & (x \neq 0) \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 - Etudier la continuité de la fonction f en 0 à droite.
- 2 - a) Vérifier que $\frac{f(x) - 2}{x} = e^{-x} + e^{\frac{-1}{x}} - \frac{2(e^x - 1)}{xe^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
- b) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0 à droite et interpréter géométriquement le résultat.
- 3 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{-1}{x}} = -\infty$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 4 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, puis étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
- 5 - a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{-1}{x}} - 1 \right) = -1$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1)$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 6 - a) Montrer que $f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) - g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
- b) En déduire la monotonie de la fonction f , puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}^*$.
- 7 - Construire $(\mathcal{C}_f)$ et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ dans le repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
- 8 - Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.