

1 BAC SM BIOF**LE 08-11-2018****Prof : A .SALAMA****Durée :2h****EXERCICE 01 : (7pts)**

1. Donner la négation de la proposition suivante : $(p) : \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |xy| \leq \frac{1}{2}$
2. Ecrire en utilisant les symboles logiques et les quantificateurs, la proposition suivante :
« Il n'existe aucun nombre réel x vérifié $x^2 = -1$ »
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) : \sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq x - 1$
4. Montrer que : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 4} = 4 \Leftrightarrow x = y = 0$
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose $p(n) = n^2 + 7n + 12$.
 - a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n + 3)^2 < p(n) < (n + 4)^2$
 - b) Montrer par l'absurde que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \sqrt{p(n)} \notin \mathbb{N}$
6. Montrer par récurrence : $(\forall a > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) ; (1 + a)^n \geq 1 + na$

EXERCICE 02 : (6pts)

1. On considère l'ensemble suivant : $K = \left\{ (a; b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \right\}$
 - a) Montrer que : $(a; b) \in K \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 4$.
 - b) Ecrire K en extension
2. Soit E un ensemble non vide . A, B et C trois parties de E , tel que $B \subset A \subset C \subset E$ et $(S) \begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$; Montrer que $X \in S \Rightarrow X = (B \cup \bar{A}) \cap C$
3. Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E ($E \neq \emptyset$)

Montrer que : $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

EXERCICE 03 : (7pst)

I) On considère l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

1. Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset]-1.1[$, puis déduire que f n'est pas surjective.
2. Montrer que f est injective. Puis Montrer que $f^{-1}\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right) = [0; 1]$
3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1.1[$. Puis déterminer f^{-1} l'application réciproque de f

II) Montrer que l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ est injective.

$$(m; n) \mapsto m - \frac{1}{n}$$

$(x ; y) \mapsto (xy ; \frac{x}{y})$

BONNE CHANCE



