

NB : la propreté de la feuille et la clarté des réponses seront prises en considération.

Exercice 1

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_{n+1}} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 2$. (1 pt)
2. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{U_{n+1}}$, puis déduire la monotonie de (U_n) . (1,5pts)
3. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(U_n - 2)$. (1 pt)
(b) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_n - 2 \leq (\frac{2}{3})^n$. (1 pt)
4. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}), V_n = \frac{U_n - 2}{U_{n-1}}$.
(a) Montrer que $(V_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique. (1 pt)
(b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . (1,5 pts)
5. Calculer la somme : $S_n = \frac{1}{U_0 - 2} + \frac{1}{U_1 - 2} + \dots + \frac{1}{U_{n-1} - 2}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. (1,5 pts)

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite numérique $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2a \\ U_{n+1} = 2a - \frac{a^2}{U_n} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > a$. (1 pt)
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \frac{1}{U_n - a}$.
(a) Montrer que $(V_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{a}$. (1 pt)
(b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de a et n . (1,5 pts)

Exercice 3

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \sin(\frac{\alpha}{2}) \\ U_{n+1} = U_n \cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in]0; \pi[$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 0$. (1 pt)
2. Étudier la monotonie de U_n . (1 pt)
3. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = U_n \sin(\frac{\alpha}{2^{n+1}})$.
(a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. (1 pt)
(b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . (1,5 pts)

Exercice 4

1. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sqrt{3} \cos(\alpha) + \sin(\alpha) = 2 \cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$. (1 pt)
2. On considère l'équation $(E) : \sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) = \sqrt{3} \cos(x) + \sin(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
(a) Montrer que: $(E) \Leftrightarrow \cos(3x - \frac{\pi}{6}) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$. (1 pt)
(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) . (1,5 pts)