

Dénombrement

I - Principe fondamental de dénombrement

1) Définition

Soient n un entier naturel non nul et E un ensemble à n élément .

On dit que E est un ensemble fini.

Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé Cardinal de E
noté $\text{Card}(E) = n$

Dénombrer un ensemble fini, c'est compter ses éléments, c'est-à-dire calculer son cardinal.

2 - Exemple

Si $A = \{1; 2; 3; a; b; c\}$ alors $\text{Card}(A) = 6$.

Si $A = \emptyset$ il comporte 0 élément alors $\text{Card}(A) = 0$

Dénombrement

3 - Propriétés

Soient A et B deux parties d'un ensemble finis E .

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ si $A \cap B = \emptyset$
- $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) * \text{Card}(B)$

4 - Exemple

Un centre de loisirs accueille 100 élèves, 53 élèves pratiquent le football, 33 pratiquent le basket-ball et 15 pratiquent le football et le basket-ball.

- 1) Quelle est le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport?
- 2) Quelle est le nombre d'élèves qui pratiquent le football sans le basket-ball?
- 3) Quelle est le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball sans le football ?
- 4) Quelle est le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas les deux sports?

Dénombrement

5) Principe multiplicatif

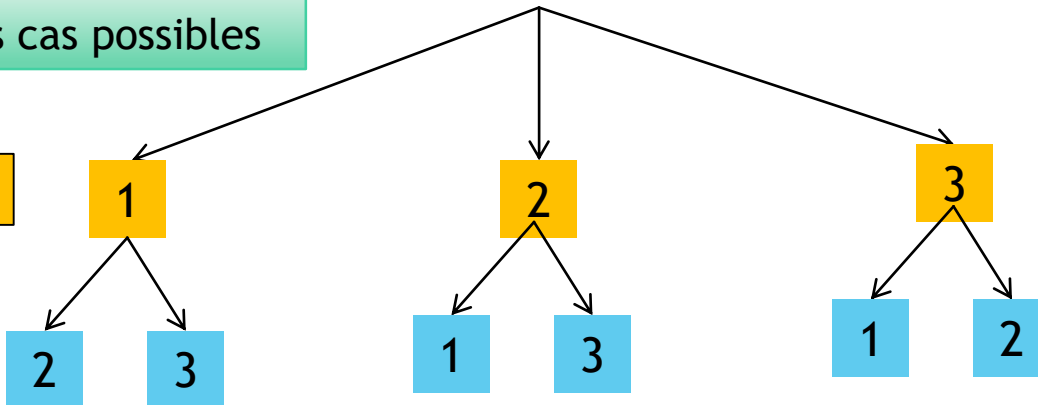
a - Activité

1) Quels sont les nombres de deux **chiffres distincts** que l'on peut former à partir des chiffres suivants : 1, 2 et 3.

Arbre des cas possibles

Chiffre des unités

Chiffre des dizaines



Il y a **3 choix** possibles pour choisir le chiffre des unités et **2 choix** possibles pour choisir le chiffre des dizaines donc on a $3 \times 2 = 6$ nombres possibles
les nombres formés par deux chiffres parmi les chiffres 1, 2 et 3 **sans répétition sont** :
21; 31; 12; 32; 13; 23.

Dénombrement

2) Quels sont les nombres de **deux chiffres** que l'on peut former à partir des chiffres suivants : 1, 2 et 3.

Arbre des cas possibles

Chiffre des unités

1

2

3

Chiffre des dizaines

1

2

3

1

2

3

1

2

3

Il y a **3 choix** possibles pour choisir le chiffre des unités et **3 choix** possibles pour choisir le chiffre des dizaines donc on a $3 \times 3 = 9$ nombres possibles les nombres formés par deux chiffres parmi les chiffres 1, 2 et 3 **avec répétition** sont: 21; 31; 12; 32; 13; 23; 11; 22; 33.

Dénombrement

b - Principe multiplicatif

Si une expérience peut se décomposer en p opérations élémentaires tels que:

- * La première opération peut être effectuée de n_1 manières différentes.
- * La deuxième opération peut être effectuée de n_2 manières différentes.
- * La troisième opération peut être effectuée de n_3 manières différentes.
- * La $P^{ième}$ opération peut être effectuée de n_p manières différentes.

Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuées de

$$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p \text{ manières différentes.}$$

C-Exemples

1) Dans la classe 2BPCF il y a 21 filles et 12 garçons.

Il faut une fille et un garçon pour représenter la classe dans un événement culturel. Combien de possibilités de choix?

Solution: 21 possibilités pour choisir une fille et 12 possibilités pour choisir un garçon. Il y a $21 \times 12 = 252$ possibilités

Dénombrement

2) Combien de nombres de trois chiffres qu'on peut former avec les chiffres suivants : 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;... ;9 ?

Solution:

Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des **unités**

Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des **dizaines**

Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des **centaines**

Le nombre de possibilités est: $10 \times 10 \times 9 = 900$

3) On lance une pièce de monnaie 2 fois de suites. Quelle est le possibilités?

Solution:

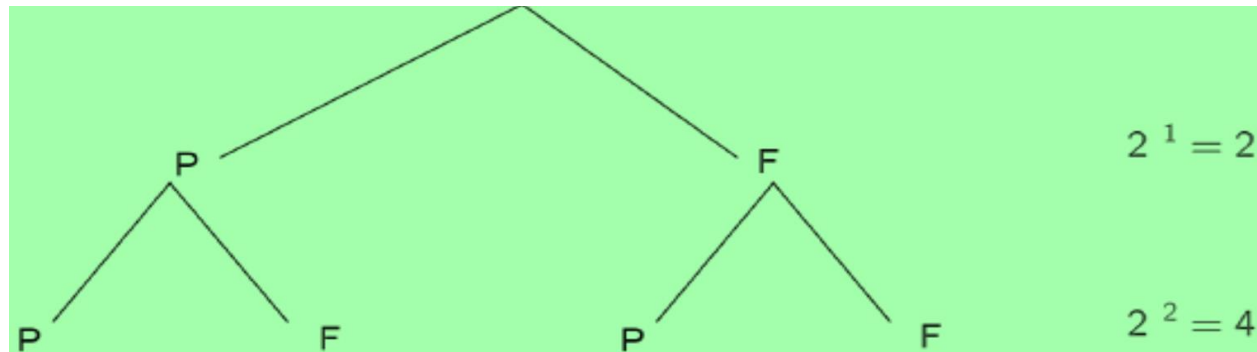
Il y'a 2 possibilités pour le premier jet: P (pile) ou F (face)

Il y'a 2 possibilités pour le deuxième jet: P (pile) ou F (face)

Le nombre de possibilités est $2 \times 2 = 4$

L'ensemble des possibilités est :

$$\Omega = \{PP; FF; PF; FP\}$$



Dénombrement

II - Arrangement avec répétition

1 - Définition

Soit E un ensemble fini, $\text{card}(E) = n$ on pose $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ $p \in \mathbb{N}^*$
Chaque élément $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ de E^p s'appelle un arrangement avec répétition d'ordre p de n éléments.

Exemple: $E = \{1, 2, 3, 4\}$

Les triplets $(1, 1, 2)$; $(1, 4, 2)$; $(2, 3, 2)$... sont des arrangements avec répétition d'ordre 3 de 4 éléments .

Les 5-uplets $(1, 1, 2, 2, 3)$; $(1, 3, 4, 4, 2)$... sont des arrangements avec répétition d'ordre 5 de 4 éléments

2 - Propriété

Soit E un ensemble fini, $\text{card}(E) = n$, le nombre des arrangements avec répétition d'ordre p de n éléments est le cardinal de E^p qui est $\text{card}(E^p) = (\text{card} E)^p$

Dénombrement

3 - Exemple

Une urne contient: 6 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges

On tire arbitrairement, successivement et avec remise 3 boules de l'urne.

- 1) Quel est le nombre des cas possibles?
- 2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:
 - A" les 3 boules tirées sont blanches"
 - B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"
 - C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"
 - D" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux"
 - E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"
 - G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

Dénombrement

Solution:

6 B ; 4 N ; 2 R

Tirage successif de 3 boules avec remise parmi 12

1) Quel est le nombre des cas possibles ?

$$\text{Card}(\Omega) = 12^3 = 1728$$

2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

A "les 3 boules tirées sont blanches"

$$\text{Card}(A) = 6^3 = 216$$

B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

$$\text{Card}(A) = 6^3 + 4^3 + 2^3 = 288$$

C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

L'événement contraire de C est $\bar{C}$ « les 3 boules tirées sont de la même couleur »

Donc $\bar{C} = B$

On sait que $\text{card}(C) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{C})$ donc $\text{card}(C) = 1728 - 288 = 1440$

D'où $\text{card}(C) = 1440$

Dénombrement

D'' les 3 boules tirées sont de couleur différentes deux à deux''

$$\text{Card}(\mathbf{D}) = 6(6^1 \times 4^1 \times 2^1) = 288$$

Pour ordonner les 3 couleurs dans un triplet on a 6 possibilités

(B ; N ; R) ; (B ; R ; N) ; (N ; B ; R) ; (N ; R ; B) ; (R ; N ; B) ; (R ; B ; N)

E'' parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire''

L'événement contraire de E est $\bar{E}$ « parmi les boules tirées il n'y a pas de boule noire''

$$\text{Card}(\bar{E}) = 8^3 = 512$$

On sait que $\text{card}(\mathbf{E}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{E})$ donc $\text{card}(\mathbf{E}) = 1728 - 512 = 1216$

D'où $\text{card}(\mathbf{E}) = 1216$

G'' parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge''

Pour ordonner la boule rouge dans un triplet on a 3 possibilités

$$\text{Card}(\mathbf{G}) = 3(2^1 \times 10^2) + 10^3 = 1600$$

Dénombrement

III - Arrangement sans répétition

1 - Définition

Soit E un ensemble fini, $\text{card}(E) = n$ on pose $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$
Chaque élément $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ de E^p où $(1 \leq p \leq n)$ sont différents deux à deux s'appelle un arrangement sans répétition d'ordre p de n éléments.

Exemple: $E = \{1, 2, 3, 4\}$

Les triplets $(1, 3, 2)$; $(1, 4, 2)$; $(4, 3, 2)$... sont des arrangements sans répétition d'ordre 3 de 4 éléments .

On ne peut pas avoir des arrangements sans répétition d'ordre 5 de 4 éléments

Dénombrement

2 - Propriété

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ le nombre des arrangements sans répétition d'ordre p de n éléments. ($p \leq n$) est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

Exercice

Calculer les entiers suivant : A_{10}^3 ; A_7^5 et A_4^4

3 - Permutation

Cas particulier :

Si $p = n$; l'arrangements sans répétition d'ordre n de n éléments s'appelle une permutation d'ordre n

le nombre des permutation d'ordre n est $A_n^n = n \times (n-1) \times \dots \times (n-n+1) = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$

ce nombre entier naturel s'appelle n **factoriel** ; on le note $n!$

Dénombrement

4 - Exemple

Une urne contient: 6 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges

On tire arbitrairement, successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

- 1) Quel est le nombre des cas possibles?
- 2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:
 - A" les 3 boules tirées sont blanches"
 - B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"
 - C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"
 - D" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux"
 - E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"
 - F" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

Dénombrement

Solution:

6 B ; 4 N ; 2 R

Tirage successif de 3 boules sans remise parmi 12

1) Quel est le nombre des cas possibles ?

$$\text{Card}(\Omega) = \mathbf{A}_{12}^3 = 1320$$

calculatrice

$$12 \text{ npr } 3 = 1320$$

2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

A "les 3 boules tirées sont blanches"

$$\text{Card}(A) = \mathbf{A}_6^3 = 120$$

B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

$$\text{Card}(B) = \mathbf{A}_6^3 + \mathbf{A}_4^3 = 144$$

C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

L'événement contraire de C est $\bar{C}$ « les 3 boules tirées sont de la même couleur »

Donc $\bar{C} = B$

On sait que $\text{card}(C) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{C})$ donc $\text{card}(C) = 1320 - 144 = 1176$

D'où $\text{card}(C) = 1176$

Dénombrement

D" les 3 boules tirées sont de couleur différentes deux à deux"

$$\text{Card}(\mathbf{D}) = 6(\mathbf{A}_6^1 \times \mathbf{A}_4^1 \times \mathbf{A}_2^1) = 288$$

Pour ordonner les 3 couleurs dans un triplet on a 6 possibilités

(B ; N ; R) ; (B ; R ; N) ; (N ; B ; R) ; (N ; R ; B) ; (R ; N ; B) ; (R ; B ; N)

E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"

L'événement contraire de E est $\bar{E}$ « parmi les boules tirées il n'y a pas de boule noire"

$$\text{Card}(\bar{E}) = \mathbf{A}_8^3 = 336$$

On sait que $\text{card}(\mathbf{E}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{E})$ donc $\text{card}(\mathbf{E}) = 1320 - 336 = 984$

D'où $\text{card}(\mathbf{E}) = 984$

G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

Pour ordonner la boule rouge dans un triplet on a 3 possibilités

$$\text{Card}(\mathbf{G}) = 3(\mathbf{A}_2^1 \times \mathbf{A}_{10}^2) + \mathbf{A}_{10}^3 = 1260$$

Dénombrement

VI – Les combinaisons

1 - Définition

Soit E un ensemble fini, $\text{card}(E) = n$ tout sous ensemble A de E contenant p éléments ($p \leq n$) s'appelle une combinaison d'ordre p de n éléments.

Dans un ensemble l'ordre d'écriture des éléments n'est pas important, $\{x, y, z\} = \{y, x, z\}$ ce qui n'est pas le cas pour les arrangements : $(x, y, z) \neq (y, x, z)$

2 - Propriété

Soit E un ensemble fini, $\text{card } E = n$ le nombre de combinaisons d'ordre p de n éléments est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Dénombrement

3 - Propriétés

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$:

$$\textcircled{1} \quad A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\textcircled{2} \quad C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

$$\textcircled{3} \quad C_n^{n-p} = C_n^p$$

$$\textcircled{4} \quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

4 - Exemple

Une urne contient: 6 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges

On tire arbitrairement, simultanément 3 boules de l'urne.

- 1) Quel est le nombre des cas possibles?
- 2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:
 - A'' les 3 boules tirées sont blanches''
 - B'' les 3 boules tirées sont de **la même couleur**''
 - C'' les 3 boules tirées sont de **couleurs différentes**''
 - D'' les 3 boules tirées sont de **couleurs différentes deux à deux**''
 - E'' parmi les boules tirées il y a **au moins** une boule noire''
 - G'' parmi les boules tirées il y a **au plus** une boule rouge''

Dénombrement

Solution:

6 B ; 4 N ; 2 R

Tirage simultané de 3 boules parmi 12

1) Quel est le nombre des cas possibles ?

$$\text{Card}(\Omega) = C_{12}^3 = 220$$

calculatrice

$$12 \text{ ncr } 3 = 220$$

2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

A "les 3 boules tirées sont blanches"

$$\text{Card}(A) = C_6^3 = 20$$

B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

$$\text{Card}(B) = C_6^3 + C_4^3 = 24$$

C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

L'événement contraire de C est $\bar{C}$ « les 3 boules tirées sont de la même couleur »

Donc $\bar{C} = B$

On sait que $\text{card}(C) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{C})$ donc $\text{card}(C) = 220 - 24 = 196$

D'où $\text{card}(C) = 196$

Dénombrement

D" les 3 boules tirées sont de couleur différentes deux à deux"

$$\text{Card}(\mathbf{D}) = \mathbf{C}_6^1 \times \mathbf{C}_4^1 \times \mathbf{C}_2^1 = 48$$

E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"

L'événement contraire de E est $\bar{\mathbf{E}}$ « parmi les boules tirées il n'y a pas de boule noire"

$$\text{Card}(\bar{\mathbf{E}}) = \mathbf{C}_8^3 = 56$$

On sait que $\text{card}(\mathbf{E}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{\mathbf{E}})$ donc $\text{card}(\mathbf{E}) = 220 - 56 = 164$

D'où $\text{card}(\mathbf{E}) = 164$

G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

$$\text{Card}(\mathbf{G}) = \mathbf{C}_2^1 \times \mathbf{C}_{10}^2 + \mathbf{C}_{10}^3 = 210$$

Dénombrement

Tirage

Successif
avec remise



$$n^p$$



Ordre important

Successif
sans remise



$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$



Ordre important

Simultané



$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$



Ordre pas important

Probabilité

I – Vocabulaires

1 – Exemple

Lançons un dé, a l'arrêt, sa face supérieure porte l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Si le dé est non truqué (on dit encore bien équilibré ou parfait). Nous sommes incapables de prévoir quelle face va apparaître. Nous sommes en présence d'une **expérience aléatoire**.

1, 2, 3, 4, 5 ou 6 sont les **résultats** ou les **cas possibles** ou les **issues** ou les **éventualités**.

L'ensemble des éventualités est **l'univers** Ω . $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Remarque: Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé bien équilibré, le tirage des boules simultanément ou successivement avec remise ou sans remise... sont **des expériences aléatoires**, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat. Le résultat dépend en effet du **hasard**.

Probabilité

2 – Événement

Considérons $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'univers ou ensemble des éventualités de cette expérience.

L'événement $A = \{1, 3, 5\}$ est une partie de Ω est l'événement "Obtenir un nombre impair"

$B = \{2, 4, 6\}$ est l'événement "Obtenir un nombre pair"

L'univers Ω est l'événement **certain**.

L'ensemble vide ϕ est l'événement **impossible**.



3 – Événement élémentaire

$C = \{3\}$ est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité.
On dit que c'est un **événement élémentaire**.

Probabilité

4 – Événement incompatible

l'événement A "Obtenir un nombre impair" et soit l'événement $D = \{4, 6\}$. Aucune éventualité ne réalise simultanément A et D; on dit que A et D sont incompatibles et on note $A \cap D = \emptyset$

5 – Événement contraire

Soit E "Obtenir un nombre premier" donc $E = \{2, 3, 5\}$
On note $\overline{E}$ l'événement contraire de E dans Ω c'est-à-dire "obtenir un nombre non premier".
On a $E = \{2, 3, 5\}$ donc $\overline{E} = \{1, 4, 6\}$
On a $E \cup \overline{E} = \Omega$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

II- Probabilité

1 – Définition

Soit E une épreuve aléatoire. L'ensemble des éventualités est

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

- A chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est associé un nombre réel, élément de $[0;1]$ appelé probabilité de l'événement élémentaire tel que : $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + \dots + p(\{\omega_n\}) = 1$
- La probabilité de tout événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- $p(\Omega) = 1$.
- Si $A = \phi$ alors $p(A) = 0$

Probabilité

2 – L'hypothèse d'équiprobabilité

Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même Probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.
Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme: "On tire au hasard", "boules indiscernables au toucher", "dé bien équilibré", "dé non pipé" ...

propriété

Soit p une probabilité sur un univers Ω
Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, le nombre total d'éventualités étant n , si un événement A est constitué de m éventualités alors sa probabilité est : $p(A) = \frac{m}{n}$

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

card(A) le nombre de cas favorables
card(Ω) le nombre de cas possibles

Probabilité

3 – Propriétés des probabilités

Parties de E	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A quelconque	$0 \leq p(A) \leq 1$
$\emptyset$	Événement impossible	$p(\emptyset) = 0$
E	Événement certain	$p(E) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\bar{A}$	$\bar{A}$ est l'événement contraire de A	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Probabilité

4 – Exemple

Un examen oral de mathématique comporte 5 questions en géométrie, 4 questions en algèbre et 3 questions en analyse.

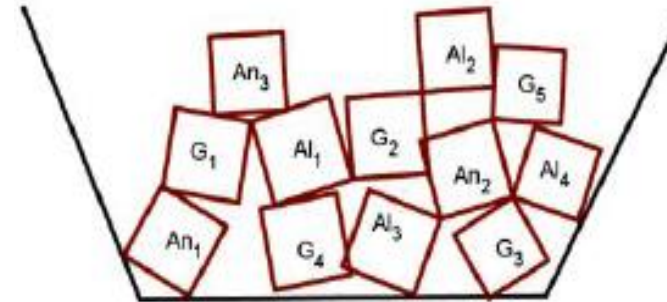
1) L'étudiant **tire simultanément 3 questions** d'un sac contenant les 12 questions.

Calculer la probabilité des événements suivants:

A « les trois questions sont en géométrie »

B « une seule question pour chaque matière »

C « au moins une question en géométrie »



2) L'étudiant **tire les 3 questions l'une après l'autre sans remise**

Calculer la probabilité des événements A, B et C.

3) L'étudiant **tire les 3 questions l'une après l'autre avec remise**

Calculer la probabilité des événements A, B et C.

Probabilité

Solution:

5 géométrie ; 4 algèbre ; 3 analyse

1)

Tirage simultané de 3 boules parmi 12

$$\text{Card}(\Omega) = C_{12}^3 = 220$$

calculatrice

$$12 \text{ ncr } 3 = 220$$

$$\text{Card}(A) = C_5^3 = 10 \text{ Donc } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

$$\text{d'où } p(A) = \frac{1}{22}$$

$$\text{Card}(B) = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60 \text{ Donc } p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

$$\text{d'où } p(B) = \frac{3}{11}$$

Première méthode

$$\text{Card}(C) = C_5^1 \times C_7^2 + C_5^2 \times C_7^1 + C_5^3 = 185 \text{ Donc } p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44} \text{ d'où } p(C) = \frac{37}{44}$$

Deuxième méthode

C « au moins une question en géométrie » l'événement contraire de C est :

$\bar{C}$ « aucune question en géométrie » c'est-à-dire $\bar{C}$ « les 3 questions en algèbre ou en analyse »

$$\text{Card}(\bar{C}) = C_7^3 = 35 \text{ donc } p(\bar{C}) = \frac{\text{card}(\bar{C})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

$$\text{On sait que } p(C) = 1 - p(\bar{C}) \text{ donc } p(C) = 1 - \frac{7}{44} \text{ d'où } p(C) = \frac{37}{44}$$

Probabilité

2) L'étudiant tire les 3 questions l'une après l'autre sans remise

Tirage successif de 3 boules sans remise parmi 12

$$\text{Card}(\Omega) = A_{12}^3 = 1320$$

calculatrice

$$12 \text{ npr } 3 = 1320$$

$$\text{Card}(A) = A_5^3 = 60 \quad \text{Donc} \quad p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22} \quad \text{d'où} \quad p(A) = \frac{1}{22}$$

$$\text{Card}(B) = 3!(A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1) = 360 \quad \text{Donc} \quad p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11} \quad \text{d'où} \quad p(B) = \frac{3}{11}$$

Première méthode

C « au moins une question en géométrie » l'événement contraire de C est :

$\bar{C}$ « aucune question en géométrie »

$$\text{Card}(\bar{C}) = A_7^3 = 210 \quad \text{donc} \quad p(\bar{C}) = \frac{\text{card}(\bar{C})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{210}{1320} = \frac{7}{44}$$

$$\text{On sait que} \quad p(C) = 1 - p(\bar{C}) \quad \text{donc} \quad p(C) = 1 - \frac{7}{44} \quad \text{d'où} \quad p(C) = \frac{37}{44}$$

Deuxième méthode

$$\text{Card}(C) = 3(A_5^1 \times A_7^2) + 3(A_5^2 \times A_7^1) + A_5^3 = 1110$$

$$\text{Donc} \quad p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1110}{1320} = \frac{37}{44} \quad \text{d'où} \quad p(C) = \frac{37}{44}$$

Probabilité

3) L'étudiant tire les 3 questions l'une après l'autre avec remise

Tirage successif de 3 boules avec remise parmi 12

$$\text{Card}(\Omega) = 12^3 = 1728$$

$$\text{Card}(A) = 5^3 = 125 \text{ Donc } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{125}{1728} \quad \text{d'où } p(A) = \frac{125}{1728}$$

$$\text{Card}(B) = 6(5^1 \times 4^1 \times 3^1) = 360 \text{ Donc } p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24} \quad \text{d'où } p(B) = \frac{5}{24}$$

Première méthode

C « au moins une question en géométrie » l'événement contraire de C est :

$\bar{C}$ « aucune question en géométrie »

$$\text{Card}(\bar{C}) = 7^3 = 343 \text{ donc } p(\bar{C}) = \frac{\text{card}(\bar{C})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{343}{1728}$$

$$\text{On sait que } p(C) = 1 - p(\bar{C}) \text{ donc } p(C) = 1 - \frac{343}{1728} \quad \text{d'où } p(C) = \frac{1385}{1728}$$

Deuxième méthode

$$\text{Card}(C) = 3(5^1 \times 7^2) + 3(5^2 \times 7^1) + 5^3 = 1385 \text{ Donc } p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1385}{1728} \quad \text{d'où } p(C) = \frac{1385}{1728}$$

Probabilité

Exercice

Dans une urne se trouve 9 jetons :

Quatre jetons rouges numérotés 0;1;1;2 et trois jetons verts numérotés 1; 2; 2 et deux jetons noirs numérotés 1; 3

1) On tire simultanément et au hasard trois jetons de l'urne

On considère les événements suivants:

A " Obtenir 3 jetons verts " ; B " Obtenir 3 jetons de même couleurs "

C " Obtenir 3 jetons de couleurs différents "

D " Obtenir 3 jetons qui portent le même numéro "

E " Obtenir au moins un jeton qui porte le numéro 1 "

F " Obtenir au plus un jeton vert "

G " Obtenir 3 jetons de couleurs différents deux à deux "

Déterminer La probabilité des événements A; B; C; D; E; F; G.

2) Même question pour le tirage successif de trois jetons avec remise.

3) Même question pour le tirage successif de trois jetons sans remise.

Probabilité

IV – Probabilité conditionnelle

1) Définition:

Soient les événements A et B d'un univers Ω .

La **probabilité conditionnelle** de B sachant que A est réalisé est le nombre réel noté $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ donc $\mathbf{P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}} ; p(A) \neq 0$

Remarque :

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles $p(A/B)$ et $p(B/A)$ sont toutes les deux définies et on a : $p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$.

2) Événements indépendants:

A et B deux événements de probabilité non nulle.

A et B sont **indépendants** si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Probabilité

Exemple

une urne U contient neuf jetons indiscernables au toucher:

- Trois jetons blancs numérotés 2 ; 2 ; 1.
- Deux jetons jaunes numérotés 1 ; 1.
- Quatre jetons noirs numérotés 1 ; 1 ; 1 ; 2.

On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.
On considère les deux événements suivants :

A « Les trois jetons tirés ont le même numéro »

B « Les trois jetons tirés de couleurs différents deux à deux »

1. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ probabilité des événements A et B .

2. Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{1}{14}$.

3. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

4. Donner la probabilité de l'événement C « Les jetons tirés ont le même numéro sachant que les trois jetons tirés de couleurs différents deux à deux »

Probabilité

Solution:

Trois B : 2 ; 2 ; 1 ; Deux J : 1 ; 1 Quatre N : 1 ; 1 ; 1 ; 2

1)

Tirage simultané de 3 jetons parmi 9

6 (1)

3 (2)

$$\text{Card}(\Omega) = C_9^3 = 84$$

$$\text{Card}(A) = C_6^3 + C_3^3 = 21 \text{ Donc } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4} \quad \text{d'où } p(A) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Card}(B) = C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1 = 24 \text{ Donc } p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7} \quad \text{d'où } p(B) = \frac{2}{7}$$

2) On a

$$\text{Card}(A \cap B) = C_1^1 \times C_2^1 \times C_3^1 = 6 \quad p(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14} \quad p(A \cap B) = \frac{1}{14}$$

3) On a

$$p(A \cap B) = \frac{1}{14} \quad \text{et} \quad p(A) \times p(B) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$$

D'où $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ d'où A et B sont indépendants.

4) C « Les trois jetons tirés ont le même numéro sachant que les jetons tirés sont de couleurs différents deux à deux »

$$P(C) = P_B(A) \text{ donc } P(C) = P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{4} = \frac{7}{28} \quad \text{d'où } P(C) = \frac{7}{28}$$

Probabilité

IV – Variables aléatoires

Dans toute la suite Ω désigne l'univers associé à chaque expérience aléatoire.

1) Exemple introductif:

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher.

On tire simultanément 2 boules. On perçoit un Dirham par boule rouge tirée.

Quels sont les gains possibles ? Avec quelles probabilités ?

On peut tirer 0, 1 ou 2 boules rouges, et donc gagner 0, 1 ou 2 Dirhams.

Désignons par X la somme perçue. La probabilité que X soit égal à 0 est noté $p(X = 0)$; elle est égale à la probabilité de l'événement « tirer 0 boule rouge et 2 boules blanches » ;

$$p(X = 0) = \frac{C_3^0 \times C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Probabilité

La probabilité que X soit égal à 1 est noté $p(X=1)$; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 1 boule rouge et 1 boules blanches » ;

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} ;$$

La probabilité que X soit égal à 2 est noté $p(X=2)$; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 2 boules rouges et 0 boule blanche » ;

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_4^0}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} .$$

Ces résultats peuvent se présenter dans un tableau, la première ligne indiquant les valeurs possibles x de X.

x	0	1	2
$p(X = x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Ce tableau définit la loi de probabilité de X.

Probabilité

2) Variable aléatoire - Loi de probabilité:

a) Définition 1 :

On appelle variable aléatoire X réelle toute application de Ω dans $\mathbb{R}$, qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Notons $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X . $X(\Omega) = \{ x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n \}$.

b) Définition 2 :

La loi de probabilité de X est la fonction qui à tout élément x de $X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x . Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à x » et que l'on note : $p(X = x)$.

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau

x	x_1	x_2		x_n
$p(X = x)$	p_1	p_2		p_n

Conseil : Lorsqu'on calcul une loi de probabilité d'une variable aléatoire, il est indispensable de vérifier que :

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 .$$

Probabilité

3 - Espérance mathématique

a) Définition

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1; x_2; \dots; x_n$ avec les probabilités $p_1; p_2; \dots; p_n$. On appelle espérance mathématique de X le nombre réel positif noté $E(X)$ et

défini par: $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Dans la pratique, la loi de probabilité étant donnée par un tableau :

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X = x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Il suffit de calculer la somme : $x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_n p_n$.

b) Exemple

Pour l'exemple introductif on a $E(X) = 0 \times p(X=0) + 1 \times p(X=1) + 2 \times p(X=2) = \frac{6}{7}$.

Probabilité

4 - Variance - Ecart type

a) Définition de la variance

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1; x_2; \dots; x_n$ avec les probabilités $p_1; p_2; \dots; p_n$. On appelle variance de X le nombre réel positif noté $V(X)$ et défini par:

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2$$

b) Autre expression de la variance

$$V(X) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - (E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i)^2 - (E(X))^2$$

Probabilité

c) Ecart-type:

Pour tout variable aléatoire X , On appelle écart-type de X le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ et défini par:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

d) Exemple:

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément de l'urne 3 boules et l'on considère la variable aléatoire X définie par « nombre de boules noires parmi les boules tirées ».

- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- b) Déterminer la loi de probabilité de X .
- c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

Probabilité

Solution:

a) $X \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$P(X=0) = P_1 = \frac{C_5^3 \times C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56} ; P(X=1) = P_2 = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} ;$$

$$P(X=2) = P_3 = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56} ; P(X=3) = P_4 = \frac{C_5^0 \times C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56} .$$

b) Loi de probabilité

X	0	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

c) L'Espérance mathématique $E(x) = \sum_{i=1}^n P_i x_i = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n .$

$$E(x) = 0 \times \frac{10}{56} + 1 \times \frac{30}{56} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{63}{56} = \frac{9}{8} .$$

La variance est $V(X) = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2 .$

$$V(X) = P_1 \left(x_1 - \frac{9}{8} \right)^2 + P_2 \left(x_2 - \frac{9}{8} \right)^2 + \dots + P_4 \left(x_4 - \frac{9}{8} \right)^2 ;$$

$$V(X) = \frac{10}{56} \left(0 - \frac{9}{8} \right)^2 + \frac{30}{56} \left(1 - \frac{9}{8} \right)^2 + \frac{15}{56} \left(2 - \frac{9}{8} \right)^2 + \frac{1}{56} \left(3 - \frac{9}{8} \right)^2 = \frac{1800}{3584} = 0,5 .$$

L'Ecart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} ; \sigma(X) = \sqrt{0,5} = 0,20 .$