

Correction de l'examen national session normale 2020

Exercice 2

- 1 Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

a Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

b En déduire les solutions de l'équation (E).

- 2 Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

a Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$

b Écrire les nombres b et c sous forme trigonométrique.

c En déduire que $a = 4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

- 3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et a telle que $d = a^4$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

a Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$

b Déterminer l'image du point C par la rotation R

c Déterminer la nature du triangle OBC .

d Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés

Correction

1

a

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[-2(\sqrt{2} + \sqrt{6})\right]^2 - 4 \times 16 \\ &= 4 \left[(\sqrt{2} + \sqrt{6})\right]^2 - 4 \times 16 \\ &= 4 \left[(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - 16\right] \\ &= 4 \left(2 + 6 + 2\sqrt{2}\sqrt{6} - 16\right) \\ &= 4 \left(-2 - 6 + 2\sqrt{2}\sqrt{6}\right) \\ &= -4 \left(6 + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{6}\right) \\ &= -4 \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 \end{aligned}$$

b Puisque $\Delta < 0$ alors l'équations (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i\sqrt{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + 2i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2} \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{et } z_2 = \bar{z}_1 = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}), (\sqrt{2} + \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})\}$$

2

a On a :

$$\begin{aligned} b\bar{c} &= (1 + i\sqrt{3}) \overline{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})} \\ &= (1 + i\sqrt{3}) (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6} \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et on a : } a = b\bar{c} \text{ alors : } ac &= bc\bar{c} \\ &= (\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \overline{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})} b \\ &= (\sqrt{2} + i\sqrt{2}) (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) b \\ &= [(\sqrt{2})^2 - (i\sqrt{2})^2] b \\ &= 4b \end{aligned}$$

b On a : $|b| = \sqrt{1+3} = 2$ alors $a = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 $= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Et on a : $|c| = \sqrt{2+2} = 2$ alors $c = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 $= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

c On sait que $a = b\bar{c}$ alors $|a| = |b\bar{c}| = |b||\bar{c}| = |b||c| = 4$

$$\begin{aligned} \text{Et on a : } \arg(a) &\equiv \arg(b\bar{c}) [2\pi] \\ &\equiv \arg(b) + \arg(\bar{c}) [2\pi] \\ &\equiv \arg(b) - \arg(c) [2\pi] \\ &\equiv \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$

$$\text{donc } a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

3

a On a :

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow z' = z_o + e^{i\frac{\pi}{12}}(z - z_o) \\ &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{12}}z \quad (\text{car } z_o = 0) \\ &\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)z \\ &\Leftrightarrow z' = \frac{1}{4} \times 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)z \\ &\Leftrightarrow z' = \frac{1}{4}az \end{aligned}$$

- b** Soit C' l'image de C par la rotation R
on a :

$$\begin{aligned} R(C) = C' &\Leftrightarrow z_{C'} = \frac{1}{4}ac \\ &\Leftrightarrow z_{C'} = \frac{1}{4} \times 4b \quad (\text{car } ac = 4b) \\ &\Leftrightarrow z_{C'} = b \end{aligned}$$

Donc B est l'image de C par la rotation R .

- c** D'après la question 2.b), on a : $|b| = |c|$ alors $OB = OC$
donc OBC est un triangle isocèle en O .
- d** On sait que $a = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ alors :

$$\begin{aligned} a^4 &= \left(4e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^4 \\ &= 4^4 e^{i\frac{4\pi}{12}} \\ &= 256 e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 128 \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= 128b \end{aligned}$$

On a : $a^4 = 128b$ alors $\frac{a^4}{b} = 128$ c-à-d $\frac{d}{b} = 128$

donc $\frac{d-0}{b-0} = 128 \in \mathbb{R}$

D'où les points O , B et D sont alignés.