

Examen blanc (3h)

Exercice 1

2,5 points

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3u_n + 1}.$$

- 0,5 pt 1. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$
0,5 pt b. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
0,25 pt c. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- 0,5 pt 2. a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < \frac{1}{3}u_n$
0,5 pt b. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$
0,25 pt c. Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

Exercice 2

3 points

- 0,25 pt 1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 5z^2 - 4iz + 1 = 0$
0,75 pt a. On pose : $Z = iz$.
Montrer que (E) est équivalente à $5Z^2 + 4Z - 1 = 0$
b. Déterminer les solutions de l'équation (E)
- 0,5 pt 2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points Ω , A et B d'affixes respectives $w = 1 + i$, $a = 1 - 5i$ et $b = 4 - 2i$
0,75 pt a. Montrer que : $a - w = \overline{w}(b - w)$
0,5 pt b. Vérifier que : $\frac{b - a}{b - w} = i$, puis en déduire la nature du triangle $AB\Omega$
0,25 pt c. Déterminer (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\bar{z} - 1 - 5i| = |z - 4 + 2i|$
d. En déduire que (Γ) passe par Ω

Exercice 3

3 points

Une urne contient 4 boules gagnantes et 6 boules perdantes (les boules sont indiscernables au toucher). Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirage gagnant.

- 1 pt 1. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule gagnante est $\frac{2}{5}$
0,5 pt 2. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
0,5 pt 3. Montrer que la loi de probabilité de X est $p(X = k) = C_4^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$
0,5 pt 4. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.
0,5 pt 5. Calculer l'espérance $E(X)$

Exercice 4

3 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(3; 1; 0)$, $B(3; 5; 3)$ et $C(4; 4; 4)$. Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant la relation suivante : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 2z + 5 = 0$

- 0,5 pt 1. a. Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$
0,5 pt b. En déduire que $7x + 3y - 4z - 24 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

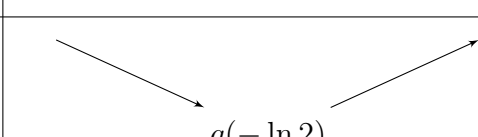
- 0,25 pt c. Calculer l'aire du triangle ABC
- 0,75 pt 2. Montrer que l'ensemble (S) est la sphère de centre $\Omega(2; 2; -1)$ et de rayon $R = 2$
- 0,5 pt 3. Vérifier que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) que l'on déterminera.
- 0,5 pt 4. Déterminer une équation cartésienne de chacune des deux plans parallèles à (ABC) est tangente à la sphère (S)

Exercice 5

8,5 points

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2(x + 1) + e^{-x}$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g(x)$			

- 0,25 pt 1. Calculer $g(-\ln 2)$
- 0,5 pt 2. En utilisant le tableau de variation ci-dessus, montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) > 0$

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + 2xe^x$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

- 0,75 pt 1. a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
- 0,5 pt b. En déduire une branche infinie de au voisinage de $+\infty$
- 0,75 pt 2. a. Vérifier que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$
- 0,75 pt b. Montrer que la droite (D) est située en dessous de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur $]0; +\infty[$ et en dessus de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur $] -\infty; 0[$
- 0,5 pt 3. a. Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = e^x g(x)$
- 0,5 pt b. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- 0,5 pt 4. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une seule tangente parallèle à la droite (D)
- 0,5 pt 5. Montrer qu'il existe un unique α de l'intervalle $]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$
- 0,75 pt 6. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un seul point d'inflexion à déterminer.
- 1,25 pt 7. Construire la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(On donnera : $\alpha \simeq 0,27$ et $f(-2) \simeq -3,54$)
- 0,5 pt 8. a. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 2xe^x dx = 2$
- 0,5 pt b. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$