

Examen blanc N° 4

Matière : Mathématiques

Classe : 2 Bac PC & SVT

Année scolaire : 2023/2024

Durée : 3 heures

Exercice 1 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{e^3}(u_n + e^3 - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1)- Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est minorée par 1 0,25pt
- 2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente. 2x0,25pt
- 3)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = u_n - 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$
 - a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison. 0,25pt
 - b)- Déterminer le terme général de la suite (v_n) 0,25pt
 - c)- En déduire que : $v_n = 1 + \frac{1}{e^{3n}}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ 0,25pt
- 4)- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 - a)- Exprimer S_n en fonction de n 0,25pt
 - b)- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 1$ 0,25pt

Exercice 2 (3 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation : $(E): z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{8} + 1 = 0$

- 1)- a)- Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -\left(2 \sin \frac{\pi}{8}\right)^2$ 0,25pt
b)- En déduire les solutions de l'équation (E) 0,5pt
- 2)- On pose : $a = \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}$
 - a)- Écrire a sous forme trigonométrique 0,25pt
 - b)- Montrer que le nombre a^4 est imaginaire pur. 0,5pt
- 3)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a^2 et $b = 1 - i$
 - a)- Vérifier que $\sqrt{2}a^2 = b$, puis en déduire que les points O, A et B sont alignés. 2x0,5pt
 - b)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left| \frac{z}{a} - a\sqrt{2} \right| = 3$ 0,5pt

Exercice 3 (3 points)

On dispose d'un dé cubique équilibré (non truqué) dont les faces portent les nombres suivants :

-1 ; -1 ; -1 ; 0 ; 1 ; 1

On lance ce dé deux fois de suite et on note le nombre obtenu pour chaque lancer.

On considère les événements suivants :

- A : « Les deux nombres obtenus sont différents »
- B : « La somme des deux nombres obtenus est nulle »
- C : « Les deux nombres obtenus sont différents sachant que leur somme est nulle »

- 1)- a)- Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$ 2x0,5pt + 1pt
 b)- En déduire si les événements A et B sont indépendants ou non ? 0,25pt
 2)- Pour tout entier naturel n , on considère l'événement S_n défini par :
 « La somme des deux nombres obtenus est égale à n ».
 Calculer la probabilité de l'événement S_n suivant les valeurs de n 0,75pt

Exercice 4 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(0, 2, -1)$ et de rayon $R = 5$, et la droite (D) passant par le point $A(2, 5, 7)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$

- 1)- a)- Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z - 20 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) 0,25pt
 b)- Calculer la distance $d(\Omega, (Oxy))$, puis en déduire que le plan (Oxy) coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon $r = 2\sqrt{6}$ 2x0,5pt
 2)- a)- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) 0,25pt
 b)- Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points à déterminer. 0,75pt
 3)- Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et perpendiculaires à la droite (D) 0,75pt

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{\frac{-2}{x}}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

- 1)- Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 3x0,5pt
 2)- Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro. 0,75pt
 3)- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat. 2x0,5pt
 4)- a)- Montrer que $f'(x) = \left(\frac{(x+1)^2 + 1}{x^2} \right) e^{\frac{-2}{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ 0,5pt
 b)- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ 0,5pt
 5)- a)- Vérifier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{-2}{x}} - 1 \right) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{-2}{x}} - 1 \right) = -2$ 2x0,5pt
 b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ 2x0,5pt
 6)- Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points à déterminer. 0,5pt
 7)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (On admet que $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$) 0,75pt
 8)- Déterminer graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $(x+m)e^{\frac{2}{x}} - x = 1$ 0,75pt
 9)- a)- Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 e^{\frac{-2}{x}}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$ 0,25pt
 b)- Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ 0,5pt