

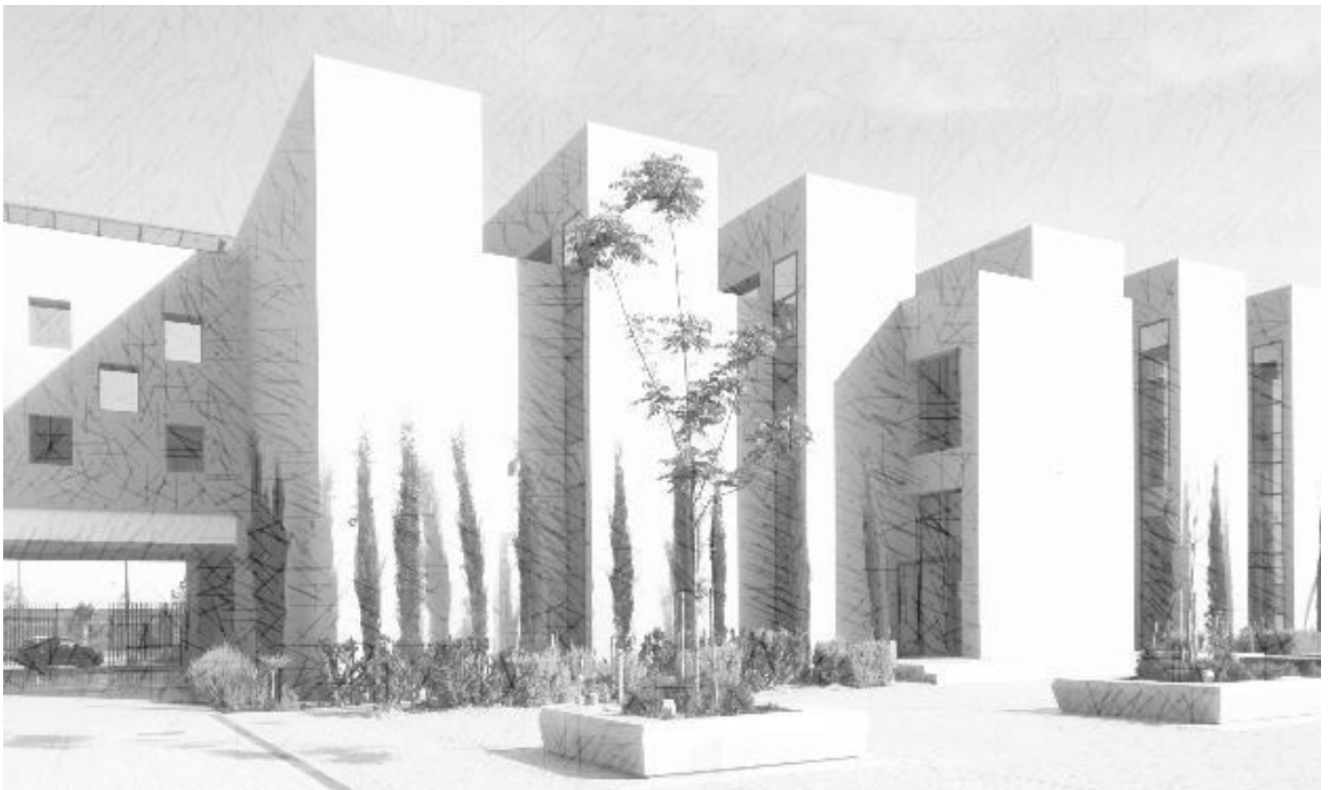
# *Livret* *Examens blancs du LYDEX*

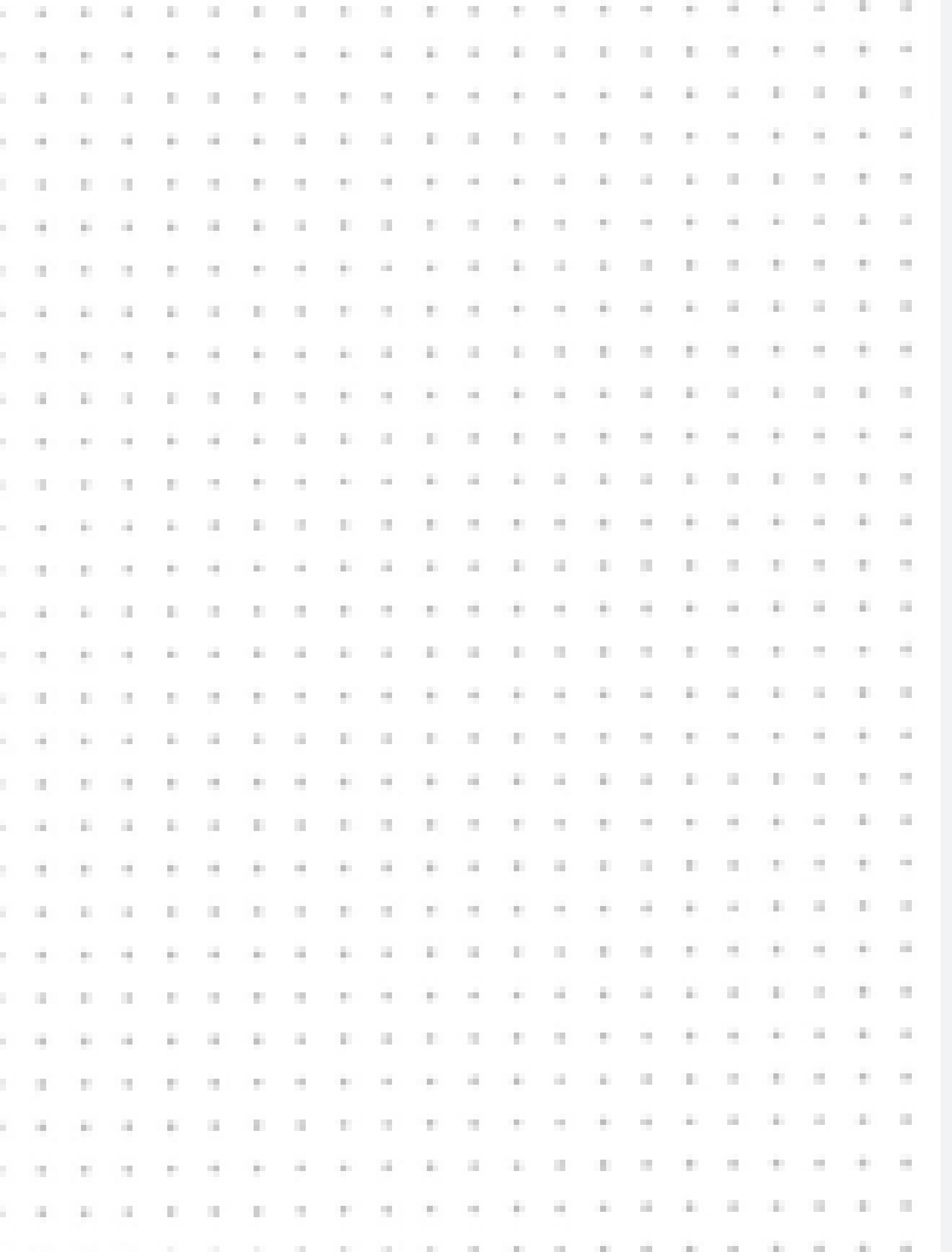
Driss Gharrabou  
2SM A/B - Avril 2024

---

**APEE** Association pour la promotion  
de l'Enseignement d'Excellence

**LYCEE**  
**MOHAMMED VI**  
**D'EXCELLENCE**







|                                                        |                                       |                                              |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------|
| Lycée d'Excellence de Benguerir<br>Etablissement privé | LYCEE<br>D'EXCELLENCE<br>DE BENGUERIR | ثانوية التميز التأهيلية الخصوصية<br>ابن جرير |
| Niveau 2SM A&B                                         | Examen blanc N° 1                     | 08/05/2020                                   |
| Mathématiques                                          | Mai 2020                              | Durée :4h<br>coefficient : 9                 |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |          |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1 | <p><b>Exercice (3.75 points)</b></p> <p>les parties I) et II) sont indépendantes</p> <p><b>Partie I)</b></p> <p>On rappelle que <math>(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)</math> est un anneau unitaire De zéro la matrice nulle</p> $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et d'unité la matrice } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et soit la matrice } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ <p>0.25 1) Montrer que <math>A^2 = 3I - 2A</math></p> <p>0.5 2) En déduire que la matrice <math>A</math> est inversible et que l'anneau <math>(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)</math> est non intègre</p> <p><b>Partie II)</b></p> <p>Pour tout <math>(x; y) \in \mathbb{R}^2</math>; on pose <math>x * y = x + y = xy</math></p> <p>1) On pose <math>G = \mathbb{R} - \{-1\}</math></p> <p>0.75 a) Montrer que <math>*</math> est une loi de composition interne commutative et associative dans <math>G</math></p> <p>0.5 b) Montrer que <math>(G; *)</math> est un groupe commutatif</p> <p>0.25 c) soit <math>x \in G</math> on pose <math>x^{(1)} = x</math>; <math>x^{(2)} = x * x</math> et pour tout <math>n \in \mathbb{N}^*</math>; <math>x^{(n+1)} = x^{(n)} * x</math></p> <p>Montrer que <math>(\forall x \in \mathbb{N}^* : x^{(n)} = (x + 1)^n - 1</math></p> <p>2) On rappelle que <math>(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)</math> est un anneau unitaire</p> <p>On considère l'ensemble <math>E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1-x &amp; x \\ -2x &amp; 1+2x \end{pmatrix} / x \in G \right\}</math></p> <p>0.25 a) Montrer que <math>E</math> est une partie stable de <math>(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)</math></p> <p>b) Soit <math>\varphi</math> l'application de <math>G</math> vers <math>E</math> définie par <math>(\forall x \in G) : \varphi(x) = M(x)</math></p> <p>0.5 Montrer <math>\varphi</math> est un isomorphisme de <math>(G; *)</math> vers <math>(E; \times)</math>; en déduire la structure de <math>(E; \times)</math></p> <p>0.5 c) Montrer que <math>H = \{M(x)/x \in ]0; +\infty[ \}</math> est un sous-groupe de <math>(E; \times)</math></p> <p>0.25 d) Résoudre dans <math>E</math> l'équation <math>A \times X = M(0)</math>, avec <math>A = \begin{pmatrix} 0 &amp; 2 \\ -2 &amp; 3 \end{pmatrix}</math></p> | Page 1/3 |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

**Exercice 2 (3.5 points)**

Les parties I) et II) sont indépendantes

1pt

I) 1) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^3 = 1$

0.75

2) En déduire dans  $\mathbb{C}$  les solutions de l'équation  $z^3 - (z + 1)^3 = 0$  sous leurs forme algébrique

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Soit  $B$  le point d'affixe  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Soit  $f$  l'application qui à tout point  $M(z)$  différent de  $B$  associe le point  $M'(z')$  tel que  $z' = \frac{1 + j\bar{z}}{\bar{z} - j}$

1) vérifier que  $\bar{j} = j^2$  et que  $1 + j + j^2 = 0$

2)a) Montrer que  $z' = j + 2\frac{z - j}{|z - j|^2}$ , en déduire que  $M' \neq B$

b) Montrer que les points  $B; M$  et  $M'$  sont alignés

c) On pose  $(E)$  l'ensemble des points invariants par  $f$

Montrer que  $(E)$  est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

III) On considère le point  $\Omega$  d'affixe 2

Et soit  $r$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et  $h$  l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1) Pour tout point  $M(z)$  du plan on pose  $M''(z'')$  son image par l'application  $g = h \circ r$

a) Montrer que  $z - z'' = i(2 - z'')$

b) En déduire la nature du triangle  $\Omega MM''$  lorsque  $M \neq \Omega$

c) Soit  $A$  le point d'affixe  $a = 2 + i$

Pour tout entier naturel  $n$  on pose  $A_0 = A$  et  $A_{n+1} = g(A_n)$  et on pose  $z_n$  l'affixe du point  $A_n$

Montrer que  $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$

d) déterminer l'entier naturel  $n$  pour que  $\Omega, A_0$  et  $A_n$  soit alignés

**Exercice 3 (3 points)**

1) Montrer que 163 est un nombre premier

2) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $13x - 162y = 1$

3) On considère dans  $\mathbb{Z}$  le système  $(S) : \begin{cases} x \equiv a[13] \\ x \equiv b[162] \end{cases}$  . tel que  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

a) Montrer que le nombre  $x_0 = 325b - 324a$  est une solution de  $(S)$

b) Montrer que  $x$  est solution de  $(S)$  si et seulement si 2106 divise  $x - x_0$

c) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  le système  $(S)$

4) Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que  $x^{25} \equiv 3[163]$

a) Montrer que  $x \wedge 163 = 1$

b) Montrer que  $x^{25} \equiv 3[163] \Leftrightarrow x \equiv 3^{13}[163]$

c) déterminer l'entier naturel  $x$  tel que  $\begin{cases} x^{25} \equiv 3[163] \\ x \leq 162 \end{cases}$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; on considère l'équation :  $(E) : x \ln(x) = \frac{1}{n}$  tel que  $x \in ]0; +\infty[$

**Partie I)**

- 1) Etudier les variation de la fonction définie par  $g(x) = x \ln(x)$
- 2) Montrer que l'équation  $(E)$  admet une solution unique  $\alpha_n$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$
- 3) a) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{(n \geq 1)}$  est décroissante en déduire qu'elle est convergente  
 b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{e^n}$  , en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$   
 c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \ln(\alpha_n^n) = 1$

**Partie II)**

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $\begin{cases} f_n(x) = x e^{\frac{-1}{nx}} ; \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

et on note par  $(C_n)$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f_n$  à droite en 0
- 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$   
 b) Montrer que  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  ; puis dresser son tableau de variation
- 3) a) Montrer que :  $(\forall t \geq 0) \quad 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$   
 b) En déduire que  $(\forall x \geq 0) : 0 \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$   
 c) Montrer que la droite d'équation  $y = x - \frac{1}{n}$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C_n)$   
 d) précisez la position relative de la courbe  $(C_n)$  avec son asymptote oblique
- 4) a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; étudier la position relative de  $(C_{n+1})$  et  $(C_n)$   
 b) Tracer les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

**Partie III)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on considère la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par  $F_n(x) = \int_{\frac{1}{2n \ln(x)}}^{\frac{1}{n \ln(x)}} f_n(t) dt$

- |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0.5pt | 1) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall t > 1) : e^{-\frac{1}{n}} < t e^{-\frac{1}{nt}}$<br>b) Montrer que $(n \in \mathbb{N}^*)(\forall x > 1) : \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{2n \ln(x)} < F_n(x)$ ; en déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_n(x)$                                                                                                              |
| 1pt   | 2) Montrer que $(\forall t > 1) : 0 \leq t e^{-\frac{1}{nt}} \leq t$ , en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$                                                                                                                                                                                                                                            |
| 1pt   | 3) a) En utilisant le changement de variable $u = e^{-\frac{1}{nt}}$ Montrer que $(\forall x > 1) : F_n(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{\ln^3(u)} du$<br>b) Montrer que $F_n$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $(\forall x \in ]1; +\infty[) : F'_n(x) = \frac{1-4x}{4x^3 \ln^3(x)}$<br>c) En déduire le sens de variation de $F_n$ sur $]1; +\infty[$ |

**Exercice : 1 .**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; on considère l'équation :  $(E) : x \ln(x) = \frac{1}{n}$  tel que  $x \in ]0; +\infty[$

**Partie I)**

- 1) Etudier les variations de la fonction définie par  $g(x) = x \ln(x)$
- 2) Montrer que l'équation  $(E)$  admet une solution unique  $\alpha_n$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$
- 3) a) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{(n \geq 1)}$  est décroissante en déduire qu'elle est convergente
- b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \alpha_n \geq 1$

**Partie II)**

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; +\infty[$  par 
$$\begin{cases} f_n = x e^{\frac{-1}{nx}} ; \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

et on note par  $(C_n)$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f_n$  à droite en 0
- 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- b) Montrer que  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  ; puis dresser son tableau de variation
- 3) a) En utilisant le théorème des accroissements finis Montrer que :  $(\forall t \geq 0) \quad 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$
- b) En déduire que  $(\forall x \geq 0) : 0 \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$
- c) Montrer que la droite d'équation  $y = x - \frac{1}{n}$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C_n)$
- 4) a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; étudier la position relative de  $(C_{n+1})$  et  $(C_n)$
- b) Tracer les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 5) Calculer  $f_n(\alpha_n)$  , en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$

**Partie III)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on considère la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par 
$$F_n(x) = \int_{\frac{1}{2n \ln(x)}}^{\frac{1}{n \ln(x)}} f_n(t) dt$$

- 1) a) Montrer que  $(n \in \mathbb{N}^*)(\forall x > 1) : e^{-\frac{1}{n}} < e^{-\frac{1}{xn}}$
- b) Montrer que  $(n \in \mathbb{N}^*)(\forall x > 1) : \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{2n \ln(x)} < F_n(x)$  ; en déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_n(x)$
- 2) Montrer que  $(\forall x > 2) : \frac{1}{x^2} \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2x}$  En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$
- 3) Montrer que  $F_n$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  et  $(\forall x \in ]1; +\infty[) : F'_n(x) = \frac{1-x}{x^2 \ln(x)}$  , en déduire le sens de variation de  $F_n$  sur  $(\forall x \in ]1; +\infty[)$

Soit  $m$  un nombre complexe non nul

**Partie I)** On considère dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$(E_m) : m^2 Z^2 - 2mZ + 1 + m^2 = 0$$

- 1) a) Résoudre l'équation  $(E_m)$  dans l'ensemble  $\mathbb{C}$
- b) Pour  $m = e^{i\frac{\pi}{3}}$  ; écrire les deux solutions de l'équation sous la forme exponentielle

**Partie I)** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectifs  $a = 1 + im^2$  et  $b = 1 - im^2$

(On suppose que  $m^2 \neq i$  et  $m^2 \neq -i$ )

- 1) a) Montrer que les points  $O$  ;  $A$  et  $B$  sont alignés si et seulement si  $m^2 \in i\mathbb{R}$
- b) Montrer que  $(OA) \perp (OB)$  si et seulement si  $|m| = 1$
- c) En déduire que le triangle  $OAB$  est isocèle et rectangle en  $O$  si et seulement si  $m = 1$  ou  $m = -1$
- 2) Soit  $f$  l'application du plan complexe qui à tout point  $M$  d'affixe  $Z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $Z'$  tel que  $Z' = (1 + i)Z - i + m^2$
- a) Si  $Z \neq a$  , montrer que  $z' - z = i(Z - i - im^2)$  ; en déduire la nature du triangle  $AMM'$
- b) Déterminer la nature de l'application  $f$  et ces éléments caractéristiques



|                                                        |                                       |                                              |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------|
| Lycée d'Excellence de Benguerir<br>Etablissement privé | LYCEE<br>D'EXCELLENCE<br>DE BENGUERIR | ثانوية التميز التأهيلية الخصوصية<br>ابن جرير |
| Niveau 2SM A&B                                         | Examen blanc N° 1                     | 08/05/2020                                   |
| Mathématiques                                          | Mai 2020                              | Durée : 4h<br>coefficient : 9                |

**NB : il ne s'agit pas d'un contrôle continu , mais il s'agit d'un examen blanc pour vous préparer à l'examen national.**

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                   |          |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
|      | <b>Exercice 1 (3.75 points)</b>                                                                                                                                                                                                                                   | Page 1/3 |
|      | les parties I) et II) sont indépendantes                                                                                                                                                                                                                          |          |
|      | <b>Partie I)</b> On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle                                                                                                                                          |          |
|      | $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ |          |
| 0.25 | 1) Montrer $A^2 = 5A$                                                                                                                                                                                                                                             |          |
| 0.5  | 2) En déduire que la matrice $A$ est non inversible et que $A$ est un diviseur de zéro dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)$                                                                                                                               |          |
|      | <b>Partie II)</b> On rappelle que $(\mathbb{C}; +; \times)$ est un corps commutatif                                                                                                                                                                               |          |
|      | Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par                                                                                                                                                                                               |          |
|      | $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) : (x + iy) * (a + ib) = (x + a + xa) + i(y + b - 1)$                                                                                                                                         |          |
| 0.5  | 1) a) Montrer que la loi $*$ est commutative et admet un élément neutre $e$ que l'on déterminera                                                                                                                                                                  |          |
| 0.25 | b) Déterminer l'ensemble des éléments symétrisables pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$                                                                                                                                                                             |          |
| 0.75 | c) On pose $G = \{Z \in \mathbb{C} / \text{Re}(Z) \neq -1\}$ . Montrer que $(G; *)$ est un groupe commutatif                                                                                                                                                      |          |
| 0.5  | 2) Soit $H = \{x + iy / x \in ]-1; +\infty[; y \in \mathbb{R}\}$ . Montrer que $H$ est un sous-groupe de $(G; *)$                                                                                                                                                 |          |
|      | 3) On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire, d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                          |          |
|      | On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1+x & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} - \{-1\} \right\}$                                                                                                                                  |          |
| 0.25 | a) Montrer que $E$ est une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$                                                                                                                                                                                  |          |
|      | b) Soit $\varphi$ l'application qui à tout nombre complexe $x + iy$ associe la matrice $M(x)$ de $E$                                                                                                                                                              |          |
| 0.25 | Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(G; *)$ vers $(E; \times)$                                                                                                                                                                                         |          |
| 0.5  | c) Soit $M(x) \in E$ . Montrer que $M(x)$ est inversible dans $(E; \times)$ et déterminer son inverse                                                                                                                                                             |          |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <div> <div> <b>Exercice 2 (3.75 points)</b> </div> <div> <div>Page 2/3</div> </div> </div> <p>Soit <math>m</math> un nombre complexe tel que <math>m \neq 2</math></p> <p><b>Partie I)</b> On considère dans l'ensemble des nombres complexe <math>\mathbb{C}</math> l'équation :</p> $(E_m) : Z^2 - (1 - i)(m + 2)Z - i(m^2 + 4) = 0$ <div> <div>0.5</div> <div>1) a) Montrer que le discriminant <math>\Delta</math> de l'équation <math>(E_m)</math> est <math>\Delta = ((1 + i)(m - 2))^2</math></div> </div> <div> <div>0.5</div> <div>b) Déterminer <math>Z_1</math> et <math>Z_2</math> les deux racines de l'équation <math>(E_m)</math> dans l'ensemble <math>\mathbb{C}</math></div> </div> <div> <div>0.5</div> <div>2) pour <math>m = 2e^{i\frac{\pi}{3}}</math>, donner une forme trigonométrique des solutions <math>Z_1</math> et <math>Z_2</math></div> </div> <p><b>Partie II)</b></p> <p>Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct <math>(O; \vec{u}; \vec{v})</math></p> <p>On considère les points <math>A; B; C</math> et <math>\Omega</math> d'affixes respectifs <math>a = m - 2i</math>; <math>b = 2 - im</math></p> $c = \frac{m}{2}(1 + i) - 4i$ et $\omega = 2 - 2i$ <div> <div>0.25</div> <div>1) a) Déterminer l'affixe du point <math>I</math> milieu de <math>[AB]</math></div> </div> <div> <div>0.75</div> <div>b) Montrer que <math>e - \omega = \frac{1-i}{2}(m - 2)</math>, puis montrer que <math>\overrightarrow{\Omega I} \perp \overrightarrow{AB}</math></div> </div> <div> <div></div> <div>2) Soit <math>R</math> la rotation de centre <math>\Omega</math> et d'angle <math>-\frac{\pi}{2}</math></div> </div> <div> <div>0.5</div> <div>a) Montrer que <math>R(A) = B</math></div> </div> <div> <div>0.25</div> <div>b) Montrer que l'affixe du point <math>C'</math> image du point <math>C</math> par la rotation <math>R</math> est <math>\frac{m}{2}(1 - i)</math></div> </div> <div> <div>0.5</div> <div>c) Montrer que l'affixe du vecteur <math>\overrightarrow{C'I}</math> est indépendant de <math>m</math></div> </div> <p>en déduire une méthode de construction des points <math>I</math>, <math>A</math> et <math>B</math> à partir du point <math>C</math></p> |
|  | <p><b>Exercice 3 (3points)</b></p> <p>Le but de cet exercice est de déterminer les entiers naturels premiers <math>p</math> et <math>q</math> qui vérifient la relation</p> $(\mathcal{R}) : 4^q \equiv 1[p] \text{ et } 4^p \equiv 1[q]$ <div> <div></div> <div>1) dans cette question on suppose <math>p = q</math></div> </div> <div> <div>0.25</div> <div>a) Montrer que <math>p \wedge 4 = 1</math></div> </div> <div> <div>0.5</div> <div>b) Montrer que <math>4^{p-1} \equiv 1[p]</math>, en déduire que <math>p = 3</math></div> </div> <div> <div></div> <div>2) dans cette question on suppose que <math>p \neq q</math> et on prend <math>p &lt; q</math></div> </div> <div> <div>0.5</div> <div>a) Montrer que <math>4^{p-1} \equiv 1[p]</math></div> </div> <div> <div>0.5</div> <div>b) On pose <math>d</math> le plus petit entier naturel non nul tel que <math>4^d \equiv 1[p]</math>; montrer que <math>d (p - 1)</math> et <math>d q</math><br/>( utiliser les restes de la division euclidienne de <math>p - 1</math> et de <math>q</math> par <math>d</math> )</div> </div> <div> <div>0.5</div> <div>c) Montrer que <math>(p - 1) \wedge q = 1</math>; en déduire que <math>d = 1</math></div> </div> <div> <div>0.5</div> <div>d) En déduire que <math>p = 3</math> et que <math>q = 7</math></div> </div> <div> <div>0.25</div> <div>e) En déduire tous les entiers naturels premiers <math>p</math> et <math>q</math> qui vérifient la relation <math>(\mathcal{R})</math></div> </div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

**Exercice 4 (9.5 points)**

Page 3/3

Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f_n(x) = \ln(x) + n - nx$

et  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

**Partie I)**

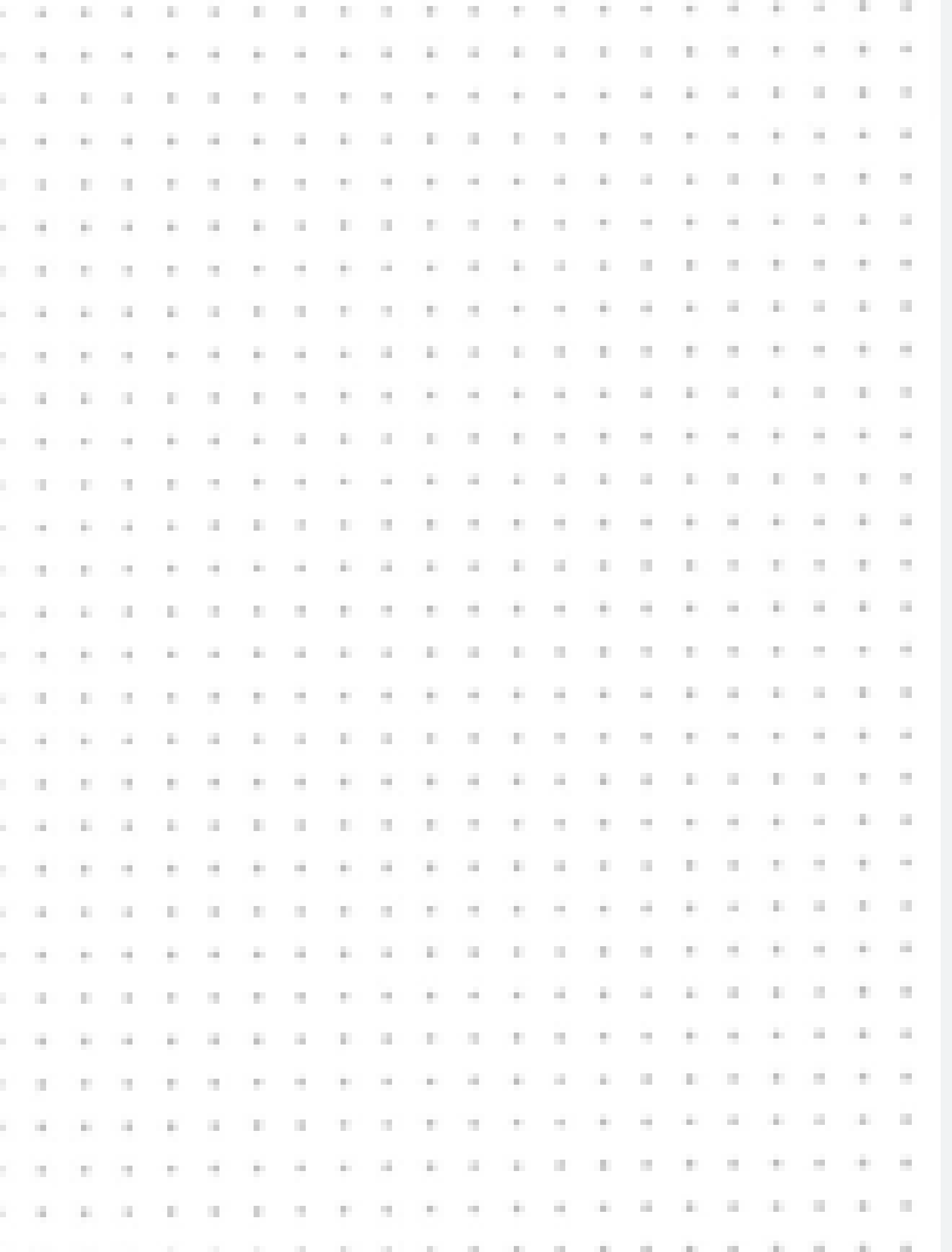
- 0.75 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ , puis étudier les branches infinies de  $(C_n)$
- 0.5 2) Étudier les variations de  $f_n$ , et dresser son tableau de variations
- 0.25 3)a) En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que  $(\forall n \geq 2) : \ln(n) < n - 1$
- 0.5 b) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique  $a_n$  dans l'intervalle  $]0; \frac{1}{n}[$
- 0.75 c) Montrer que  $(\forall n \geq 2) : f_n(a_{n+1}) = a_{n+1} - 1$ ; en déduire que la suite  $(a_n)$  est décroissante
- 0.5 d) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a_n)}{n} = -1$
- 0.75 4) Tracez  $(C_2)$  la courbe de  $f_2$  (On donne  $a_2 \simeq 0.2$  et  $\ln(2) \simeq 0.7$ )

**Partie II)**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $D_F = [0; \frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[$  par 
$$\begin{cases} F(x) = \int_{\ln(x)}^{\ln(2x)} \frac{e^t}{t} dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- 0.75 1) a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $D_F - \{0\}$  et que  $(\forall x \in D_F - \{0\}) : F'(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x)\ln(2x)}$
- 0.5 b) En déduire les variations de  $F$
- 0.25 2)a) Montrer que  $(\forall x \in D_F - \{0\})(\exists c \in ]\ln(x); \ln(2x)[) : F(x) = \ln(2) \frac{e^c}{c}$
- 0.5 b) Montrer que  $(\forall x \in ]0; \frac{1}{2}[) : \frac{2x \ln(2)}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x \ln(2)}{\ln(x)}$
- en déduire que  $f$  est continue à droite en 0
- 0.5 c) Montrer que  $(\forall x \in ]1; +\infty[) : \frac{x \ln(2)}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{2x \ln(2)}{\ln(x)}$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0.5 3) Montrer que  $(\forall x \in D_F - \{0\}) : F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt$
- 0.75 4)a) déterminer le signe de  $f_2$  sur  $[a_2; \frac{1}{2}[$ , puis en déduire que  $(\forall x \in [a_2; \frac{1}{2}[) : F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{2t-2} dt$
- 0.5 b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} F(x) = -\infty$
- 0.75 5) a) Montrer que  $(\forall x > 1) : F(x) \geq \int_x^{2x} \frac{1}{t-1} dt$ , en déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$
- (Remarquer que  $\forall t > 1) : \ln(t) < t - 1$ )
- 0.5 b) Dresser le tableau de variations de  $F$

**Fin**





|                                                        |                                       |                                              |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------|
| Lycée d'Excellence de Benguerir<br>Etablissement privé | LYCEE<br>D'EXCELLENCE<br>DE BENGUERIR | ثانوية التميز التأهيلية الخصوصية<br>ابن جرير |
| Niveau : 2SMA1&2                                       | Examen blanc<br>Juin 2020             | 8/06/2020<br>Durée : 4h<br>coefficient : 9   |
| Mathématiques                                          |                                       |                                              |

**NB : L'épreuve comporte 5 exercices , le candidat doit choisir entere l'exercice 1 ou 2 et les exercices 3 ; 4 et 5 sont obligatoires**

|      |                                                                                                                                                      |          |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
|      | <b>Exercice 1 (4 points)</b>                                                                                                                         | Page 1/3 |
|      | On rappelle que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire intègre                                                                  |          |
|      | Soient $*$ et $T$ les deux lois de composition internes définies sur $\mathbb{Z}$ par :                                                              |          |
|      | $(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2) \quad x * y = x + y - 2$ et $xTy = xy - 2x - 2y + 6$                                                              |          |
| 0.75 | 1) Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe commutatif                                                                                            |          |
|      | 2) On considère l'application $\varphi$ définie de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ par : $(\forall x \in \mathbb{Z}) : \varphi(x) = x + 2$            |          |
| 0.25 | a) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, T)$                                                        |          |
| 0.25 | b) Déterminer l'élément neutre pour la loi $T$ dans $\mathbb{Z}$                                                                                     |          |
| 0.5  | 3) Montrer que la loi $T$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans $\mathbb{Z}$                                                                |          |
| 0.75 | 4) Montrer que $(\mathbb{Z}, *, T)$ est un anneau commutatif unitaire                                                                                |          |
| 0.5  | 5) a) Montrer que l'anneau $(\mathbb{Z}, *, T)$ est intègre                                                                                          |          |
| 0.5  | b) $(\mathbb{Z}, *, T)$ est-il un corps ? justifier votre réponse                                                                                    |          |
| 0.5  | 6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $x^{(1)} = x$ et $x^{(n+1)} = x^{(n)}Tx$ , résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $4Tx^{(3)} = 18$          |          |
|      | <b>Exercice 2 (4 points)</b>                                                                                                                         |          |
| 0.25 | 1) Montrer que 163 est un nombre premier                                                                                                             |          |
| 0.75 | 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $13x - 162y = 1$                                                                                          |          |
|      | 3) On considère dans $\mathbb{Z}$ le système $(S) : \begin{cases} x \equiv a[13] \\ x \equiv b[162] \end{cases}$ . tel que $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ |          |
| 0.25 | a) Montrer que le nombre $x_0 = 325b - 324a$ est une solution de $(S)$                                                                               |          |
| 0.5  | b) Soit $x \in \mathbb{Z}$ , montrer que $x$ est solution de $(S)$ si et seulement si 2106 divise $x - x_0$                                          |          |
| 0.5  | c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)$                                                                                                       |          |
|      | 4) Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x^{25} \equiv 3[163]$                                                                                            |          |
| 0.5  | a) Montrer que $x \wedge 163 = 1$                                                                                                                    |          |
| 0.75 | b) Montrer que $x^{25} \equiv 3[163] \Leftrightarrow x \equiv 3^{13}[163]$                                                                           |          |
| 0.5  | c) déterminer l'entier naturel $x$ tel que $\begin{cases} x^{25} \equiv 3[163] \\ x \leq 162 \end{cases}$                                            |          |

**Exercice 3 (5 points)**

Page 2/3

Les parties I) , II) et III) sont indépendantes

0.5 I) 1) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^3 = 1$

0.5 2) En déduire dans  $\mathbb{C}$  les solutions de l'équation  $z^3 - (z + 1)^3 = 0$  sous leurs formes algébriques

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Soit  $B$  le point d'affixe  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Soit  $f$  l'application qui à tout point  $M(z)$  différent de  $B$  associe le point  $M'(z')$  tel que  $z' = \frac{1 + j\bar{z}}{\bar{z} - j}$

0.5 1) vérifier que  $\bar{j} = j^2$  et que  $1 + j + j^2 = 0$

0.75 2)a) Montrer que  $z' = j + 2\frac{z - j}{|z - j|^2}$ , en déduire que  $M' \neq B$

0.5 b) Montrer que les points  $B; M$  et  $M'$  sont alignés

c) On pose  $(E)$  l'ensemble des points invariants par  $f$

0.5 Montrer que  $(E)$  est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

III) On considère le point  $\Omega$  d'affixe 2

Et soit  $r$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et  $h$  l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1) Pour tout point  $M(z)$  du plan on pose  $M''(z'')$  son image par l'application  $g = h \circ r$

0.5 a) Montrer que  $z - z'' = i(2 - z'')$

0.25 b) En déduire la nature du triangle  $\Omega MM''$  lorsque  $M \neq \Omega$

c) Soit  $A$  le point d'affixe  $a = 2 + i$

Pour tout entier naturel  $n$  on pose  $A_0 = A$  et  $A_{n+1} = g(A_n)$  et on pose  $z_n$  l'affixe du point  $A_n$

0.5 Montrer que  $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$

0.5 d) Déterminer l'entier naturel  $n$  pour que les points  $\Omega, A_0$  et  $A_n$  soient alignés

**Exercice 4 (2 points)**

1) Soit  $n$  un entier naturel non nul

0.5 a) Montrer que  $(\forall t \geq 0) : 1 + \sum_{k=1}^{k=2n-1} (-1)^k t^k \leq \frac{1}{t+1} \leq 1 + \sum_{k=1}^{k=2n} (-1)^k t^k$

( C' est-à-dire  $1 - t + t^2 - \dots - t^{2n-1} \leq \frac{1}{t+1} \leq 1 - t + t^2 - \dots - t^{2n-1} + t^{2n}$ )

0.5 b) En déduire que pour tout  $x \geq 0$  on a  $\sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leq \ln(x+1) \leq \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$

2) On considère la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $u_n = S_{2n}$  et  $v_n = S_{2n+1}$

0.5 a) Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes

0.5 b) Calculer  $\lim u_n$  ?

**Partie I)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; on considère l'équation :  $(E) : x \ln(x) = \frac{1}{n}$  tel que  $x \in ]0; +\infty[$

- 0.5 1) Etudier les variations de la fonction définie par  $g(x) = x \ln(x)$
- 0.5 2) Montrer que l'équation  $(E)$  admet une solution unique  $\alpha_n$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$
- 0.5 3)a) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{(n \geq 1)}$  est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente
- 0.5 b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$ , en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$
- 0.5 c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n^n)$

**Partie II)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ; On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x e^{\frac{-1}{nx}} ; \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

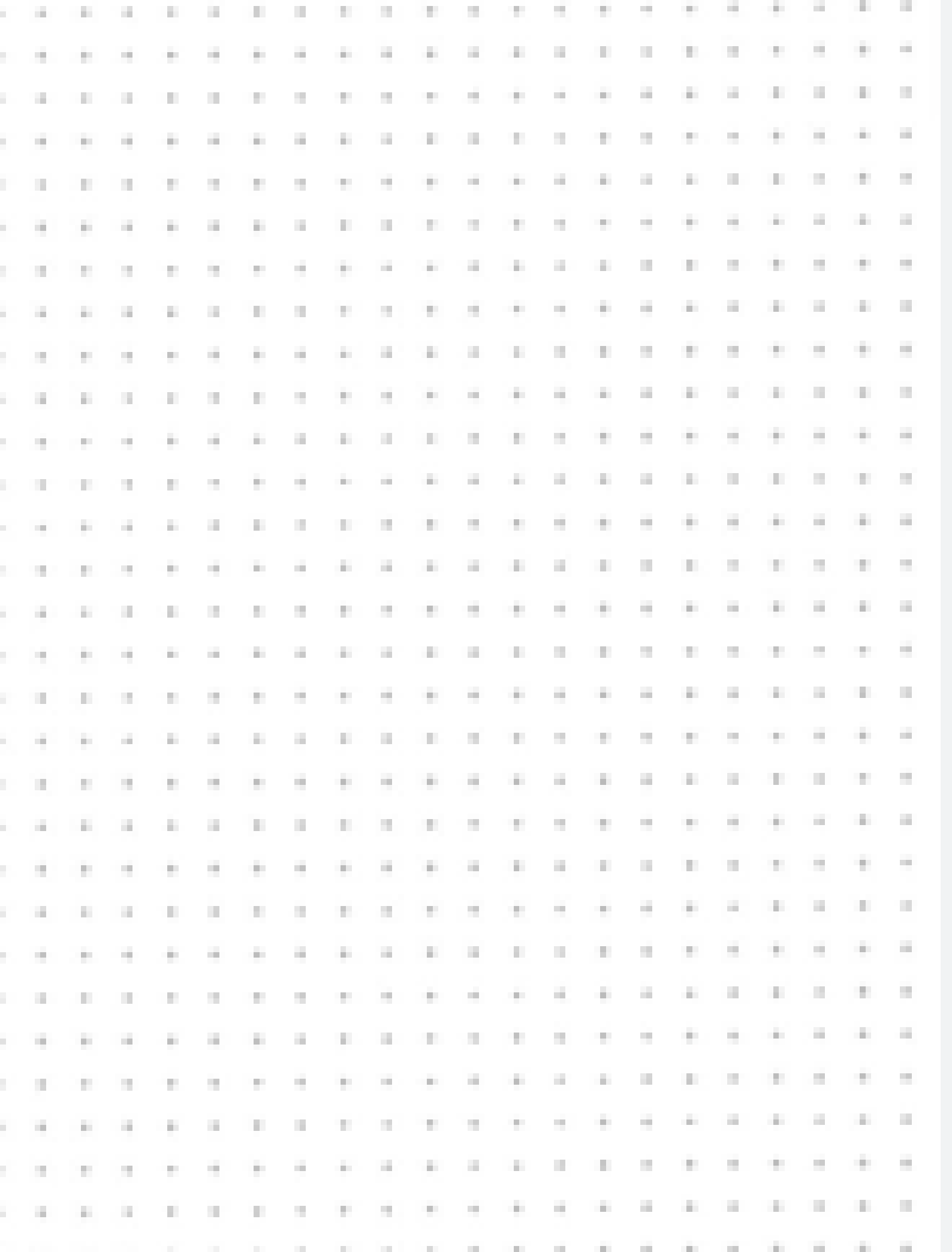
et on note par  $(C_n)$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 0.5 1) Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f_n$  à droite en 0
- 0.25 2)a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- 0.5 b) Montrer que  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ ; puis dresser son tableau de variation
- 0.5 3)a) Montrer que :  $(\forall t \geq 0) \quad 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$
- 0.5 b) En déduire que  $(\forall x \geq 0) : 0 \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$
- 0.75 c) Montrer que la droite d'équation  $y = x - \frac{1}{n}$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C_n)$ , puis précisez la position relative de la courbe  $(C_n)$  avec son asymptote oblique
- 0.25 4)a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ; étudier la position relative de  $(C_{n+1})$  et  $(C_n)$
- 0.5 b) Tracer les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

**Partie III)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on considère la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par  $F_n(x) = \int_{\frac{1}{2n \ln(x)}}^{\frac{1}{n \ln(x)}} f_n(t) dt$

- 0.25 1)a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x > 1) : f_n\left(\frac{1}{2n \ln(x)}\right) = \frac{1}{2nx^2 \ln(x)}$
- 0.5 b) Montrer que  $(n \in \mathbb{N}^*)(\forall x > 1) : \frac{1}{(2nx \ln(x))^2} \leq F_n(x)$ ; en déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_n(x)$
- 0.5 2) Montrer que  $(\forall t > 1) : 0 \leq t e^{-\frac{1}{nt}} \leq t$ ; en déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$
- 0.5 3)a) En utilisant le changement de variable  $u = e^{-\frac{1}{nt}}$ , montrer que :
- $$(\forall x > 1) : F_n(x) = \frac{1}{n^2} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{\ln^3(u)} du$$
- 0.75 b) Montrer que  $F_n$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  et que :
- $$(\forall x \in ]1; +\infty[) : F'_n(x) = \frac{1}{n^2} \left( \frac{1-4x}{4x^3 \ln^3(x)} \right)$$
- 0.25 c) En déduire le sens de variation de  $F_n$  sur  $]1; +\infty[$





|                                                        |                                              |                                              |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Lycée d'Excellence de Benguerir<br>Etablissement privé | <b>LYCEE</b><br>D'EXCELLENCE<br>DE BENGUERIR | ثانوية التميز التأهيلية الخصوصية<br>ابن جرير |
| Niveau 2SM A&B                                         | Examen blanc N°2                             | 19/06/2020                                   |
| Mathématiques                                          |                                              | Durée :4h<br>coefficient : 9                 |

**NB : - L'épreuve comporte 5 exercices**  
**- Le candidat doit choisir entre l'exercice 1 ou 2 et les exercices 3 ; 4 et 5 sont obligatoires**

- La durée de l'épreuve est de 4 heures
- les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat
- L'exercice 1 se rapporte aux structures algébriques .....(3.5 points)
- L'exercice 2 se rapporte à l'arithmétique .....(3.5 points)
- L'exercice 3 se rapporte aux nombres complexes .....(3.5 points)
- L'exercice 4 se rapporte à l'analyse .....(3.25 points)
- L'exercice 5 se rapporte à l'analyse .....(9.75 points)
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

**Exercice 1 (3.5 points)**

Page 2/4

On rappelle que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et d'unité la matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel de dimension 4

et que  $(\mathbb{C}, +, \times)$  est un corps commutatif

Pour tout  $a \in \mathbb{R}^*$ , on considère l'ensemble  $E_a = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -ay \\ y & x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0.5 1) a) Montrer que  $(E_a, +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel

0.5 b) On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $(I; A)$  est une base de  $E_a$

0.25 2) a) Calculer  $A^2$ , puis montrer que  $E_a$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

0.75 b) Montrer que  $(E_a, +, \times)$  est un anneau commutatif unitaire

3) Dans cette question on suppose que  $a < 0$  :

0.5 Montrer que  $A^2 + aI = O$ , puis en déduire que  $(E_a, +, \times)$  n'est pas un corps

4) Dans cette question on suppose que  $a > 0$  :

On considère l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{C}$  vers  $E_a$  qui à tout nombre complexe  $z = x + iy$  de  $\mathbb{C}$  fait correspondre la matrice  $M(x, \frac{-y}{\sqrt{a}})$  de  $E_a$

0.5 a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{C}, \times)$  vers  $(E_a, \times)$

0.5 b) En déduire que  $(E_a, +, \times)$  est un corps commutatif

**Exercice 2 (3.5 points)**

les parties I) et II) sont indépendantes

Partie I) Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers positifs distincts et différents de 5

On considère dans  $\mathbb{Z}$ ; l'équation  $(E)$  :  $ax \equiv 1[pq]$  avec  $a \in \mathbb{N}^*$

0.5 1) Montrer que si  $(E)$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{Z}$  alors  $a \wedge p = 1$  et  $a \wedge q = 1$

2) Dans cette question on suppose que  $a \wedge p = 1$  et  $a \wedge q = 1$

0.75 a) Montrer que  $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[pq]$

0.5 b) En déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{Z}) : ax \equiv 1[pq] \Leftrightarrow x \equiv a^{(p-1)(q-1)-1} [pq]$

0.5 3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $5x \equiv 1[26]$

Partie II) soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2

0.5 1) Montrer que  $2 \times 10^n + 1 \equiv 0[3]$

0.75 2) Soit  $N$  l'entier naturel écrit dans le système décimal par :  $N = \underbrace{44 \dots 488 \dots 89}_{n \text{ fois } 4 \text{ et } (n-1) \text{ fois } 8}$

Montrer que  $9N = (1 + 2 \times 10^n)^2$  en déduire que  $N$  est un carré parfait

**Exercice 3 (3.5 points)**

Page 3/4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : \frac{1}{m}z^2 + (1 - 3i)z - 4m = 0$  avec  $m \in \mathbb{C}^*$

- 0.25 1) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $8 - 6i$
- 0.5 b) Déterminer en fonction de  $m$ ;  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation  $(E)$  tel que  $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$
- 0.5 c) Calculer  $\arg(z_1)$  et  $\arg(z_2)$  en fonction de  $\arg(m)$
- 2) On considère les points  $M_1, M_2, M$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_1, z_2, m$  et  $1 + 3i$
- 0.5 a) Montrer que le triangle  $OM_1M_2$  est rectangle en  $O$  et que  $OM_1 = 2OM_2$
- 0.5 b) Montrer que si  $\arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$ , alors les points  $O, M$  et  $D$  sont alignés.
- 0.5 c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  tel que  $\arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$
- 3) Le point  $M'_1$  est l'image de  $M_1$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$
- $M'_2$  est l'image de  $M_2$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$
- 0.75 Montrer que les points  $M_1, M_2, M'_1$  et  $M'_2$  sont cocycliques.

**Exercice 4 (3.25 points)**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction numérique  $g_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$

- 0.5 1) Montrer que pour tout  $n \geq 2$  il existe un réel unique  $\beta_n$  de l'intervalle  $]0, 1[$  tel que  $g_n(\beta_n) = 0$
- 0.75 2) Montrer que la suite  $(\beta_n)_{n \geq 2}$  est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
- On pose :  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$ .
- 0.25 3) a) Vérifier que pour  $t \neq 1$  on a :  $1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$ .
- 0.5 b) En déduire que  $\beta_n + \frac{\beta_n^2}{2} + \dots + \frac{\beta_n^n}{n} = -\ln(1 - \beta_n) - \int_0^{\beta_n} \frac{t^n}{1-t} dt$
- 0.25 c) Montrer que  $(\forall n \geq 2) \quad 1 + \ln(1 - \beta_n) = - \int_0^{\beta_n} \frac{t^n}{1-t} dt$
- 0.5 4) a) Montrer que  $(\forall n \geq 2) \quad 0 \leq \int_0^{\beta_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\beta_n)}$
- 0.5 b) En déduire que  $l = 1 - e^{-1}$

Voir page suivante SVP



Soit  $n$  un entier naturel non nul .

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2} - 1$

**Partie I)** : Dans cette partie on prend  $n = 1$ .

- 0.75 1)a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$
- 0.5 b) Étudier les branches infinies de  $(C_{f_1})$  la courbe représentative de  $f_1$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 0.5 2) Calculer  $f_1'(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*$ , puis dresser le tableau de variation de la fonction  $f_1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
- 0.5 3)a) Soit  $h$  la restriction de  $f_1$  sur  $]0, 2]$ . Montrer que  $h$  est une bijection de  $]0, 2]$  vers  $J$  à déterminer.
- 0.5 b) Montrer que  $h^{-1}$  est dérivable sur  $\left] \frac{e^2}{4} - 1, +\infty \right[$  puis calculer  $(h^{-1})'(e - 1)$
- 0.75 4) Construire  $(C_{f_1})$  et  $(C_{h^{-1}})$  la courbe représentative de la fonction  $h^{-1}$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$   
( On donne  $\frac{e^2}{4} \simeq 1.82$  )

**Partie II)** :

- 0.5 1) Étudier les variations de  $f_n$  sur les intervalles  $] - \infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .
- 0.25 2) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha_n$  dans l'intervalle  $] - 1, 0[$
- 0.5 3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose :  $W_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\alpha_k^2}{k^2}$  .
- Montrer que  $(W_n)$  est croissante et qu'elle est convergente. (Remarquer que :  $\forall k \geq 2 \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ )

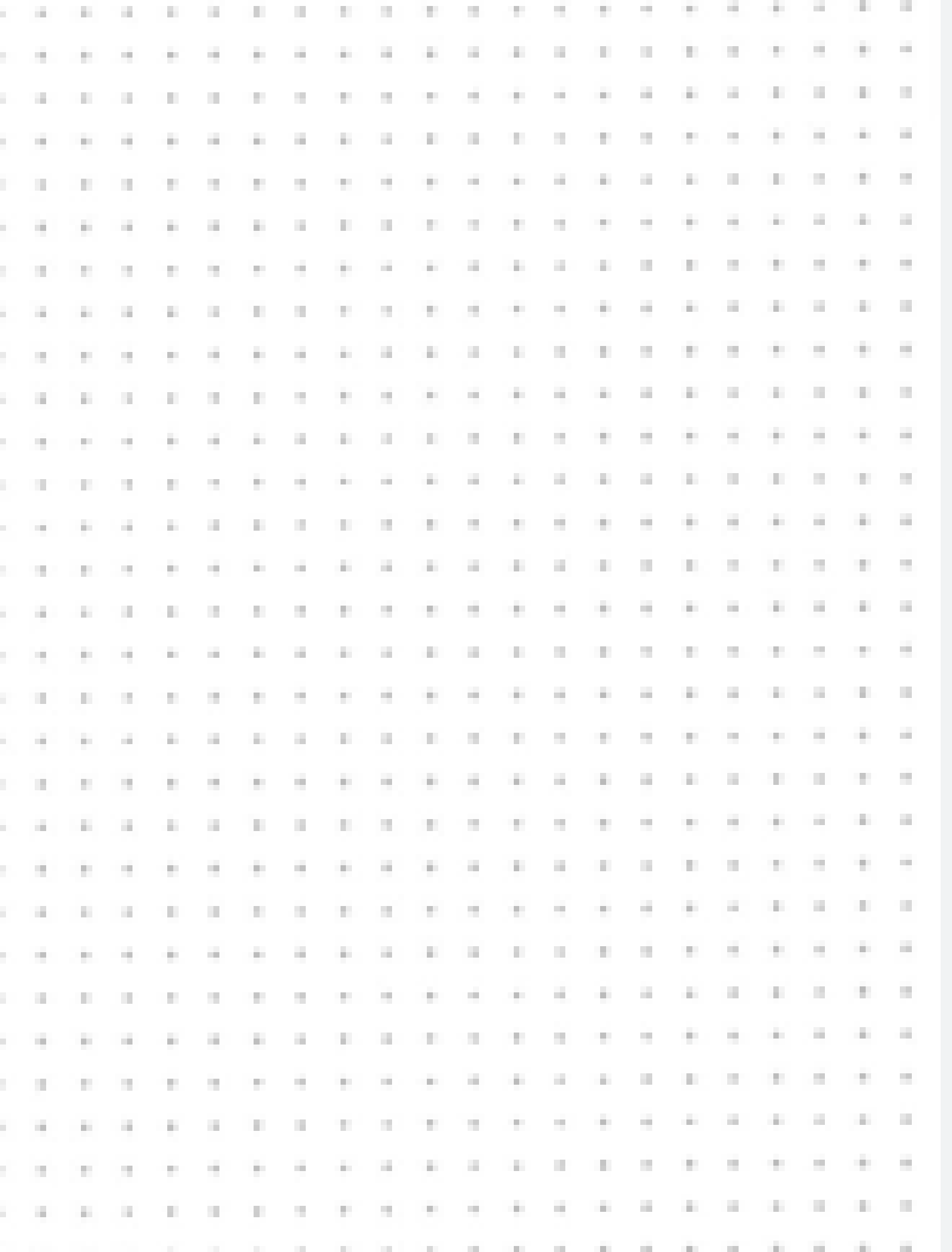
**Partie III)** :

On considère la fonction  $F$  définie par 
$$\begin{cases} F(x) = x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t^2} dt; & x \neq 0 \\ F(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 0.25 1) Vérifier que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$
- 0.5 2) a) Montrer que :  $(\forall x > 0) \quad \frac{e^x}{2} \leq F(x) \leq \frac{e^{2x}}{2}$  et que  $(\forall x < 0) \quad \frac{e^{2x}}{2} \leq F(x) \leq \frac{e^x}{2}$
- 0.25 b) En déduire que  $F$  est continue au point 0.
- 0.5 3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0.5 4)a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad F(x) = e^x - \frac{e^{2x}}{2} + x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$
- 0.5 b) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et sur  $] - \infty, 0[$  et que :
- $$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad F'(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$
- 5)a) Montrer que :
- 0.5  $(\forall x > 0) : \quad e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$  et que  $(\forall x < 0) \quad e^{2x} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^x \ln 2$
- 0.5 b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$
- 0.5 6)a) Vérifier que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad F(x) - \frac{1}{2} = -\frac{(e^x - 1)^2}{2} + x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$
- 0.5 b) En déduire que  $F$  est dérivable au point 0.
- 0.5 c) Dresser le tableau de variations de  $F$ .

**- Fin -**





|                                                        |                                              |                                              |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Lycée d'Excellence de Benguerir<br>Etablissement privé | <b>LYCEE</b><br>D'EXCELLENCE<br>DE BENGUERIR | ثانوية التميز التأهيلية الخصوصية<br>ابن جرير |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|

2Sm A/B

**EXAMEN BLANC**

A.S : 2020-2021

Date : 18 Mai 2021

Durée : 4h

Coefficient : 9

## **INSTRUCTIONS GÉNÉRALES**

1. L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
2. Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
3. Ne pas oublier de noter les pages de vos copies
4. L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

## **COMPOSANTES DU SUJET**

L'épreuve est composée de deux exercices et un problème repartis suivant les domaines comme suit :

|                       |                   |           |
|-----------------------|-------------------|-----------|
| Exercice 1            | Nombres complexes | 4 points  |
| Exercice 2            | Arithmétique      | 4 points  |
| Exercice 3 (Problème) | Analyse           | 12 points |

**Exercice 1****4 points**

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^2 - az + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , avec  $a \in \mathbb{C}$

- 0,5 pt 1. Montrer que :  $|z_0||z_1| = 1$  et  $\arg(z_0) + \arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
2. On pose  $z_0 = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$
- 0,5 pt (a) Montrer que  $a = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{6})e^{i\frac{\pi}{6}}$ .
- 0,5 pt (b) En déduire que si  $z_0 = i$  alors  $1 + ia - a^2 - ia^3 + a^4 + ia^5 = 0$
3. On suppose que :  $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ .
- 0,75 pt (a) déterminer  $z_1$  sous formes algébrique et trigonométrique, puis en déduire les valeurs de  $\cos(\frac{\pi}{12})$  et  $\sin(\frac{\pi}{12})$ .
- 0,5 pt (b) Écrire  $a$  sous formes algébrique et trigonométrique
4. Dans le plan complexe on considère la transformation  $R$  qui à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$  telle que  $z' = iz + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .  
On considère les points  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  tels que :  $a = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ,  $b = e^{i\frac{\pi}{4}}$  et  $C = R(B)$ .
- 0,5 pt (a) Montrer que  $R$  est une rotation et déterminer son centre et une mesure de son angle
- 0,25 pt (b) Vérifier que :  $c - a = i(b - a)$
- 0,5 pt (c) On pose  $D = R(C)$ .  
Montrer que  $A$  est le milieu du segment  $[BD]$ .

**Exercice 2****4 points**

Les parties I) et II) sont indépendantes.

I) Soit  $a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

Posons  $S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{2018}$

- 0,5 pt 1) a) Vérifier que  $(a - 1)S = a^{2019} - 1$
- 0,5 pt b) En déduire que  $a^{2019} \wedge (a - 1) = 1$
- 0,75 pt 2) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation :  $a^{2019}x + (a - 1)y = 1$

II) Soit dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $(E) \quad 2x^4 + 3x + 1 \equiv 0[10]$

0,5 pt 1. Montrer que si  $x$  est solution de l'équation  $(E)$ , alors  $x \wedge 10 = 1$

0,75 pt 2. En utilisant le théorème de Fermat :

Montrer que si  $x$  est solution de  $(E)$ , alors  $\begin{cases} x \equiv 1[2] \\ x \equiv -1[5] \end{cases}$

0,5 pt 3. En déduire que :  $x$  est solution de  $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[2] \\ x \equiv -1[5] \end{cases}$

0,5 pt 4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$

Soit  $n$  entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

On considère les fonctions  $f_n$  et  $g_n$  définies sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{(\ln(x))^n}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f_n(1) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g_n(x) = n(x-1) - x \ln(x)$$

### Partie I :

0,5 pt 1) a) Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g_n(x)$

0,75 pt b) Étudier les variations de la fonction  $g_n$  et dresser son tableau de variations

0,5 pt c) Montrer que  $(\forall t > 1) : e^{t-1} > t$

0,75 pt d) Montrer que l'équation  $g_n(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha_n$  dans l'intervalle  $]e^{n-1}, +\infty[$

0,5 pt 2) Montrer que  $(\forall n \geq 2) \quad e < \alpha_n < e^n$

3) On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  telle que :  $\alpha_n = e^n(1 + u_n)$ , pour tout  $n \geq 2$

0,5 pt a) Montrer que :  $(\forall n \geq 2) \quad (1 + u_n) \ln(1 + u_n) = -ne^{-n}$

0,75 pt b) Montrer que :  $(\forall n \geq 2) \quad \left| \ln(1 + u_n) \right| \leq ne^{1-n}$ , puis en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

0,5 pt 4) Calculer  $g_n(1)$  et déterminer le signe de  $g_n(x)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$

### Partie II :

0,5 pt 1) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f_n$  au point  $a = 1$

0,75 pt 2) Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

0,5 pt 3) a) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}) : f'_n(x) = \frac{g_n(x)(\ln(x))^{n-1}}{x(x-1)^2}$

0,25 pt b) Montrer que  $f_2(\alpha_2) = \frac{2 \ln(\alpha_2)}{\alpha_2}$

0,75 pt c) Étudier les variations de la fonction  $f_2$  et dresser son tableau de variations

1 pt 4) Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  de la fonction  $f_2$  ( On prend  $\alpha_2 \simeq 4.9$  et  $f_2(\alpha_2) \simeq 0.65$  )

### Partie III :

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$  par : 
$$\begin{cases} F(x) = \int_{2x-1}^x f_2(t) dt & , x \neq 1 \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

0,75 pt 1) a) Montrer que  $\left( \forall x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[ \cup \right] 1, 2 \left[ \right) :$

$$(1-x)f_2(2x-1) \leq F(x) \leq (1-x)f_2(x)$$

0,25 pt b) Étudier la dérivabilité de  $F$  au point 1

0,5 pt 2) a) Montrer que  $\left( \forall x > 5 \right) : -\left( \ln(x) \right)^2 \leq F(x) \leq -\frac{1}{2} \left( \ln(2x-1) \right)^2$

0,75 pt b) Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$  puis interpréter géométriquement le résultat obtenu

0,5 pt 3) a) Montrer que  $F$  est dérivable sur les intervalles  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$  et  $\left] 1, +\infty \right[$  et que :

$$\left( \forall x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[ \cup \right] 1, +\infty \left[ \right) : F'(x) = \frac{\left( \ln(x) \right)^2 - \left( \ln(2x-1) \right)^2}{(x-1)}$$

0,75 pt b) Montrer que  $F$  est croissante sur  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$  et décroissante sur  $\left] 1, +\infty \right[$



|                                                        |                                       |                                              |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------|
| Lycée d'Excellence de Benguerir<br>Etablissement privé | LYCEE<br>D'EXCELLENCE<br>DE BENGUERIR | ثانوية التميز التأهيلية الخصوصية<br>ابن جرير |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------|

2Sm A/B

**EXAMEN BLANC 1**

A.S : 2021-2022

Date : 10 Mai 2022

Durée : 4h

Coefficient : 9

## **INSTRUCTIONS GÉNÉRALES**

1. L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
2. Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
3. Ne pas oublier de noter les pages de vos copies
4. L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

## **COMPOSANTES DU SUJET**

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème repartis suivant les domaines comme suit :

|            |                        |           |
|------------|------------------------|-----------|
| Exercice 1 | structures algébriques | 4 points  |
| Exercice 2 | Arithmétique           | 3 points  |
| Exercice 3 | les nombres complexes  | 3 points  |
| Problème   | Analyse                | 10 points |

**Exercice 1****4 points**

On munit  $I = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$  de la loi de composition interne  $*$  définie par :  
 $(\forall (x, y) \in I^2) \quad x * y = x + y - 2xy$

0.5 pt 1(a) Montrer que la loi  $*$  est associative et commutative

0.5 pt (b) Montrer que  $(I, *)$  admet un élément neutre que l'on déterminera

0.5 pt (c) Montrer que  $(I, *)$  est un groupe abélien.

2. On considère l'ensemble  $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \right\}$

0.5 pt (a) Montrer que  $E$  est une partie stable de  $M_2(\mathbb{R}, \times)$

(b) On considère l'application  $\phi: I \rightarrow E$  définie par :

$$\begin{aligned} \phi &: I \rightarrow E \\ x &\mapsto M(x) \end{aligned}$$

0.75 pt i. Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme de  $(I, *)$  vers  $(E, \times)$

0.5 pt ii. En déduire la structure de  $(E, \times)$

0.75 pt iii. On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Vérifier que } A \in E, \text{ puis montrer que : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{1-3^n}{2} \\ \frac{1-3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\text{Noter bien que : } A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}})$$

Question bonus : Vérifier que  $*$  est une loi de composition interne sur  $I$ .

**Exercice 2****3 points**

Soit  $x$  un entier naturel vérifiant :  $10^x \equiv 2 \pmod{19}$ .

0.5 pt 1(a) Vérifier que :  $10^{x+1} \equiv 1 \pmod{19}$ .

0.5 pt (b) Montrer que :  $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ .

2. Soit  $d$  le Plus grand diviseur commun de 18 et  $x+1$

0.75 pt (a) Montrer que :  $10^d \equiv 1 \pmod{19}$ .

0.5 pt (b) Montrer que  $d = 18$

0.75 pt (c) En déduire que :  $x \equiv 17 \pmod{18}$

**Exercice 3****3 points****Partie I :**

Soit  $m$  un nombre complexe non nul .

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^2 + 2z + m^2 + 1 = 0$

- 0,5 pt 1. Déterminer  $z_1$  et  $z_2$  les deux solutions de l'équation  $(E)$
- 0,5 pt 2. Déterminer  $m$  pour que  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  soit une solution de l'équation  $(E)$
- 0,5 pt 3. Déterminer l'ensemble des points  $M(m)$  qui vérifient  $|z_1| = |z_2|$
- 0,5 pt 4. On pose  $m = e^{i\theta}$  avec  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ .  
Écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme trigonométrique

**Partie II :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct .

On considère les points  $M, M'$  et  $M''$  d'affixes respectives :

$$m, m' = -1 + im \quad \text{et} \quad m'' = -1 - im .$$

- 0,5 pt 1. Déterminer l'ensemble des points  $M(m)$  tels que  $M, M'$  et  $M''$  soient alignés
- 0,5 pt 2. Soit  $F$  la transformation complexe qui à chaque point  $M_1(z_1)$  est associé le point  $M_2(z_2)$  tel que  $z_2 = iz_1 - 1$   
Déterminer la nature  $F$  en précisant ces caractéristique.

**Exercice 4****10 points****Partie I :**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = xe^{-x}$

- 0.5 pt 1. Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$
- 0.25 pt 2. En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \leq \frac{1}{e}$

**Partie II :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 0.25 pt 1(a) Montrer que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$
- 0.75 pt (b) Calculer les deux limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  , puis donner une interprétation géométrique à ces deux résultats .
- 0.5 pt (c) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  , et que :  
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$$
- 0.5 pt (d) En déduire les variations de la fonction  $f$  , puis dresser le tableau de variations .

0.75 pt (e) Tracer la courbe  $(C)$  (On admet que  $(C)$  admet deux points d'inflexion à ne pas déterminer !)

0.5 pt 2(a) Déterminer  $f([0, 1]$  et  $f([1, +\infty[)$ .

0.5 pt (b) En déduire que :

$$(\forall x \in [0, +\infty[) \quad 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1} \text{ et que } f\left([1, \frac{e}{e-1}]\right) \subset \left[1, \frac{e}{e-1}\right]$$

0.5 pt (c) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha \in \left[1, \frac{e}{e-1}\right]$

0.5 pt 3(a) Vérifier que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = -\frac{1}{e}[f(x)]^2 g(x-1)$$

0.5 pt (b) Montrer que  $(\forall x \in [1, +\infty[) : |f'(x)| \leq \frac{1}{(e-1)^2}$

0.5 pt (c) En déduire que :

$$(\forall (x, y) \in ([1, +\infty[)^2) \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{(e-1)^2} |x - y|$$

### **Partie III :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

0.5 pt 1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq \frac{e}{e-1}$

0.5 pt 2(a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{(e-1)^2} |u_n - \alpha|$

0.5 pt (b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

### **Partie IV :**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$

0.5 pt 1. Montrer que  $\forall x \in [1, +\infty[ : \int_1^{x^2} f(t)dt \geq x^2 - 1$

0.5 pt 2. En déduire chacune des deux limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

0.5 pt 3. Montrer que la fonction  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et que  $\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = 2xf(x^2)$

0.5 pt 4. En déduire le sens de variations de la fonction  $F$ , puis dresser le tableau de variations.

# Examen Blanc 2 2021-2022 -Sujet-

المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني  
والتعليم العالي والبحث العلمي  
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة بني ملوك خنيفرة



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني  
والتعليم العالي والبحث العلمي  
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة بني ملوك خنيفرة

Lycée d'excellence de  
Benguerir  
Établissement privé

LYCEE  
D'EXCELLENCE  
DE BENGUERIR

ثانوية التميز التأهيلية  
الخصوصية  
ابن جرير

|         |                 |             |    |
|---------|-----------------|-------------|----|
| Matière | Mathématiques   | Durée       | 4h |
| Filière | 2 Bac SM A et B | Coefficient | 9  |

## INSTRUCTION GENERALE

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non autorisée.
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
- ✓ L'utilisation de couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

## COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

|            |                                                                |           |
|------------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| Exercice 1 | Les structures                                                 | 4 points  |
| Exercice 2 | Arithmétiques                                                  | 3 points  |
| Exercice 3 | Nombres complexes                                              | 3 points  |
| Problème   | Étude d'une fonction numérique<br>Les suites - Calcul intégral | 10 points |

✓  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien

**EXERCICE 1 : (4 points)**

On rappelle que  $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$  est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et d'unité la matrice } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et que } (M_2(\mathbb{R}); +; \cdot) \text{ est un}$$

espace vectoriel réel. Considérons la matrice  $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  et le sous-ensemble

$$E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x + y & 3y \\ -y & x - y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ de } M_2(\mathbb{R}).$$

- 0.5 1) Montrer que  $(E; +; \cdot)$  est un espace vectoriel réel.
- 0.5 2)a) Montrer que la famille  $(I; J)$  est une base de  $E$ .
- 0.5 b) Calculer  $J^2$  puis montrer que  $\times$  est une loi de composition interne dans  $E$ .
- 0.5 c) Montrer que  $(E; +; \times)$  est un anneau commutatif et unitaire.
- 0.5 3)a) Montrer que tout élément de  $E - \{0\}$  admet un inverse dans  $E$  qu'on déterminera.
- 0.5 b) Déduire la structure algébrique de  $(E; +; \times)$ .
- 4) Munissons l'ensemble  $F = \mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$  de la loi de composition interne  $*$  définie par :  $(\forall (x; y) \in F)(\forall (a; b) \in F) : (a; b) * (x; y) = (ax - 2by; ay + bx)$  et considérons l'application  $\varphi$  de  $E - \{0\}$  vers  $F$  qui à chaque matrice  $M(x; y)$  de  $E - \{0\}$  fait correspondre le couple  $(x; y)$  de  $F$ .
- 0.5 a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(E - \{0\}; \times)$  vers  $(F; *)$ .
- 0.5 b) Déduire la structure algébrique de  $(F; *)$ .

**EXERCICE 2 : (3 points)**

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation

$$(E) : z^2 + (1 - 3i)mz - 4m^2 = 0 \quad \text{tel que } m \in \mathbb{C}^*$$

- 0.25 1)a) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est  $\Delta = ((3 - i)m)^2$ .
- 0.5 b) Déterminer les solutions  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $(E)$ .
- 0.25 c) Calculer  $\arg(z_1)$  et  $\arg(z_2)$  en fonction de  $\arg(m)$
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

# الامتحان التجريبي للباكالوريا في مادة الرياضيات دورة يونيو 2022

## ثانوية التميز الخصوصية بن جرير شعبة العلوم الرياضية أ و ب

On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_1, z_2, m$  et  $1+3i$ .

a) Montrer que  $(OA) \perp (OB)$ .

b) Montrer que les points  $O, C$  et  $D$  sont alignés  $\Leftrightarrow \arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$

3) Soit  $A'$  le point image de  $A$  par la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $B'$  le point image de  $B$  par la rotation  $R'$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{-\pi}{2}$

Montrer que les points  $A, B, A'$  et  $B'$  sont cocycliques.

### EXERCICE 3 : (3 points)

On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E) : 187x - 255y = 68$

1) a) vérifier que le couple  $(-1; -1)$  est une solution particulière de  $(E)$

b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E)$  en indiquant les étapes de la résolution.

2) Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit  $p$  un nombre premier positif qui ne divise pas  $n$  et  $p > 2$ .

Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}; n^{(p-1)k} \equiv 1[p]$

3) a) Soient  $x$  et  $y$  deux entiers naturels non nuls tels que  $x \equiv y[p-1]$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* : n^x \equiv n^y[p]$

b) Dédurre que  $\forall n \in \mathbb{N}^* : n^x \equiv n^y[2p]$

4) Soit  $x$  et  $y$  deux entiers naturels tels que le couple  $(x; y)$  soit solution de l'équation  $E$ .

Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  les nombres  $n^x$  et  $n^y$  ont le même chiffre d'unité dans le système de numération décimal.

### Problème : (10 points)

#### Partie : I

Considérons la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x \ln(x) - x + 1$

1) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

2) Montrer que  $(\forall x \in ]0; +\infty[) : g(x) \geq 0$ .

#### Partie : II

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[ - \{1\}) f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}, f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1$$

1) Montrer que  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

2) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$  et que

$$(\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln(x))^2}$$

0.25 b)Déduire la monotonie de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

0.5 3)a)Montrer que le signe de  $f''(x)$  sur  $]0; 1[$  est celui de  $\ln(x)h(x)$  où  $h$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = -x\ln(x) - \ln(x) + 2x - 2$

0.25 b)Montrer que  $(\forall x \in ]0; 1[) : h(x) > 0$ .

0.25 c)En déduire que  $f'$  est strictement décroissante sur  $]0; 1[$ .

0.5 4)Montrer que :  $(\exists \alpha \in ]0; 1[) : f'(\alpha) = 1$ .

5)Considérons la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $\alpha < u_0 < 1$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$ .

0.75 a)Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 1$  et que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante.

0.5 b)Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - 1| \leq f'(u_0)|u_n - 1|$ .

0.5 c)Déterminer la limite de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

### Partie : III

Considérons la fonction  $F$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[ - \{1\}) : F(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt \text{ et } F(0) = F(1) = 0.$$

0.5 1)Montrer que :  $(\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[) : (x^2 - x)f(x) \leq F(x) \leq (x^2 - x)f(x^2)$ .

0.5 2)Déterminer la branche infinie de  $(C_F)$ , la courbe de  $F$  au voisinage de  $+\infty$ .

0.5 3)a)Montrer que  $F$  est dérivable en 0 à droite et dérivable en 1.

0.5 b)Interpréter géométriquement les résultats précédents.

0.25 c)Donner l'équation de la tangente à  $(C_F)$  au point d'abscisse 1.

0.25 4)a)Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

0.5 b)Montrer que le signe de  $F'$  sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  est celui de  $P(x) = x^2 + x - 1$

0.5 c)Dresser le tableau des variations de  $F$ .

1 5)Tracer  $(C_F)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ .

On donne :  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,6$  et  $F(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \simeq -0,2$ .

Bon courage Les Lydexiens

2Sm A/B

**EXAMEN BLANC 1**

A.S : 2022-2023

Date : 19 Mai 2023

Durée :4h

Coefficient : 9

---

### **INSTRUCTIONS GÉNÉRALES**

1. L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
2. Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
3. Ne pas oublier de noter les pages de vos copies
4. L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

### **COMPOSANTES DU SUJET**

L'épreuve est composée de quatre exercices repartis suivant les domaines comme suit :

|            |                        |            |
|------------|------------------------|------------|
| Exercice 1 | structures algébriques | 3,5 points |
| Exercice 2 | Arithmétique           | 3 points   |
| Exercice 3 | les nombres complexes  | 3,5 points |
| Exercice 4 | Analyse                | 10 points  |

**Exercice 1****3,5 points**

On rappelle que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel.

On considère les deux matrices :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ .

On considère l'ensemble  $E = \{M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x + \sqrt{3}y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

0,5 pt 1.(a) Montrer que  $(E, +, \cdot)$  est espace vectoriel réel.

0,5 pt (b) Montrer que  $(I, J)$  est une famille libre, puis en déduire la dimension de l'espace vectoriel  $E$ .

0,25 pt 2.(a) Vérifier que  $J^2 = \sqrt{3}J - I$ .

0,5 pt (b) Montrer que  $E$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ .

0,25 pt 3. Soit  $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ . Montrer que  $(1, a)$  est une base de l'espace vectoriel réel  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .

4. On considère l'application  $\varphi_a : E \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_a : E &\rightarrow \mathbb{C} \\ M(x, y) &\mapsto x + ay \end{aligned}$$

0,5 pt (a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(E, +)$  vers  $(\mathbb{C}, +)$ .

0,5 pt (b) Déterminer les valeurs de  $a$  tels que  $\varphi_a$  soit un homomorphisme de  $(E, \times)$  vers  $(\mathbb{C}, \times)$ .

0,5 pt (c) Posons  $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ . Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

Calculer  $\varphi_a(J^n)$  en fonction de  $n$ , en déduire que :  $J^n = I \Leftrightarrow n \equiv 0[12]$ .

**Exercice 2****3 points**

Partie A :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , tel que :  $n \geq 2$ .

Posons  $U_n = \underbrace{\overline{55 \dots 5}}_{n \text{ fois}}^{(7)}$  l'écriture dans la base 7.

0,75 pt 1. Montrer que :  $6U_n = 5(7^n - 1)$ , en déduire que  $U_{n+1} \wedge 7 = 1$ .

0,5 pt 2. Montrer que :  $U_{n+1} \wedge U_n = 5$ .

Partie B :

On admet que 2003 est un nombre premier.

Soit  $x$  un entier naturel tel que :  $x^2 + 1 \equiv 0 [2003]$

0,5 pt 1. Montrer que :  $x^{2003} \equiv -x [2003]$ .

0,75 pt 2. Montrer que :  $x^{2003} \equiv x [2003]$ , en déduire que  $2x \equiv 0 [2003]$ .

0,5 pt 3. Montrer que l'équation :  $x^2 + 1 \equiv 0 [2003]$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{N}$ .

**Exercice 3****3,5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $m \in \mathbb{C}^*$ . On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$(E) : 2z^2 + m(1+i)z + m^2(1+i) = 0$$

0,25 pt 1(a) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est :  $\Delta = (m(1-3i))^2$ .

0,5 pt (b) Résoudre l'équation  $(E)$ .

0,25 pt (c) Déterminer la forme algébrique de  $m$  tel que :  $z_1 \times z_2 = 1$ .

0,5 pt (d) Dans cette question on suppose que  $m = e^{i\alpha}$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous la forme trigonométrique.

2. On considère les points  $A, B$  et  $C$  respectivement d'affixes  $a = -im$ ,  $b = -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}im$ ,  $c = -m - \frac{1}{2}mi$ .

0,75 pt (a) Vérifier que :  $\frac{b-c}{a-c} = i$ , en déduire la nature du triangle  $ABC$ .

0,5 pt (b) Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(m)$  du plan, tel que le rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  égale  $\sqrt{10}$ . Montrer que  $(\Gamma)$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon 4.

3. On considère la transformation  $F$  qui associe à chaque point  $M(Z)$  le point  $M'(Z')$  tel que :

$$Z' = 2iZ - m(2+i)$$

0,5 pt (a) Déterminer la nature de  $F$ .

0,25 pt (b) Déterminer l'image du cercle  $(\Gamma)$  par  $F$ .

**Exercice 4****10 points**

Partie I)

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\varphi(x) = (2-x)e^x - 2$$

0,5 pt 1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ .

0,5 pt 2. Dresser le tableau de variations de la fonction  $\varphi$ .

0,5 pt 3. Montrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet unique solution  $\alpha$  dans  $[1, +\infty[$  et que  $1,59 < \alpha < 1,60$ .

Partie II)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) &= \frac{x^2}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ f(0) &= 0 \end{cases}$$

Soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ .

0,25 pt 1. Étudier la continuité de la fonction  $f$  en 0.

0,5 pt 2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

0,25 pt 3(a) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en 0.

0,5 pt (b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et sur  $] -\infty, 0[$  et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$$

0,5 pt (c) Montrer que :  $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$  et dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ . (remarquer que  $\varphi(0) = 0$ )

0,5 pt 4. Étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$ .

0,5 pt 5. Construire  $(C_f)$ .

Partie III) On pose  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  et  $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$

0,75 pt 1. Calculer  $G(x)$  et  $\lim_{+\infty} G(x)$ .

0,25 pt 2. Montrer que la fonction  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

0,5 pt 3(a) Montrer que  $(\forall t \in [\ln 2, +\infty[) \quad f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$ .

0,5 pt (b) Montrer que la fonction  $F$  est majorée sur  $\mathbb{R}^+$ .

Partie IV)

On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$ , où  $L \in \mathbb{R}$

0,25 pt 1(a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum_{p=1}^n e^{-px}$ .

0,5 pt (b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt} dt \leq \frac{\alpha(2 - \alpha)}{n}$ .

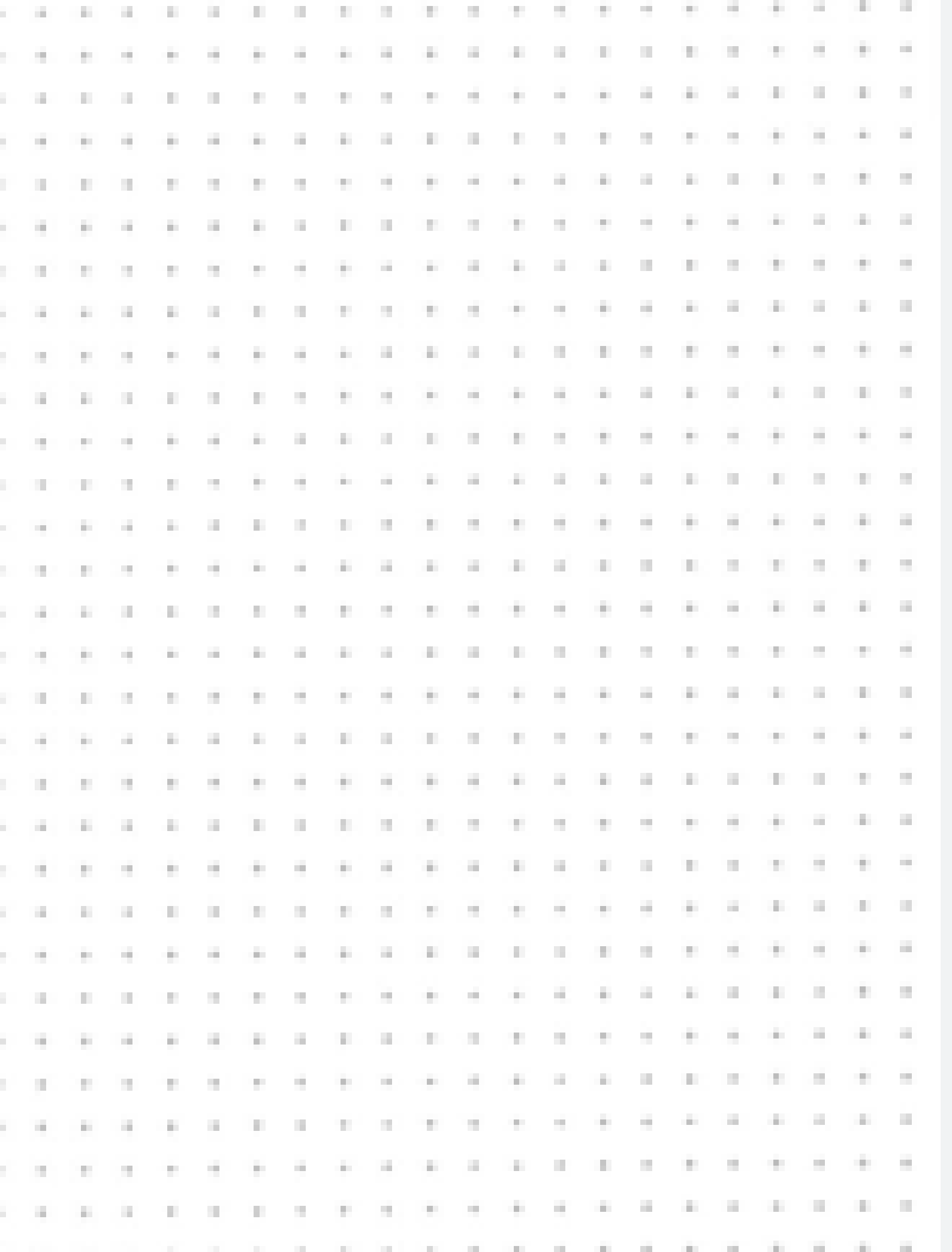
0,5 pt (c) Calculer  $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  (on pourra utiliser l'intégration par partie)

0,25 pt (d) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$ .

0,5 pt 2(a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \int_0^x f(t)e^{-nt} dt = F(x) - \sum_{p=1}^n I_p(x)$

0,25 pt (b) En déduire que la fonction  $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-nt} dt$  admet une limite finie lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

- 0,5 pt (c) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $L_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$ .  
Montrer que  $L - L_n = 2(1 + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3})$ .
- 0,25 pt (d) Montrer que la suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente. (utiliser la question IV) 1-b)
- 0,5 pt (e) On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :  $U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$   
Montrer que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{L}{2}$ .



|        |                  |                                                                            |                                                                                                                                   |
|--------|------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| الصفحة | 1                | الامتحان الوطني التجريبي<br>الاول للبيكالوريا<br>ابريل 2024<br>- الموضوع - | AP EE Association pour la Promotion<br>de l'Enseignement d'Excellence<br>LYCÉE<br>MOHAMMED VI<br>D'EXCELLENCE<br><i>Benguerir</i> |
| 5      |                  |                                                                            |                                                                                                                                   |
| *****  |                  |                                                                            |                                                                                                                                   |
| SM     | EXAMEN BLANC N°1 |                                                                            |                                                                                                                                   |
| 4h     | مدة الإنجاز      | الرياضيات                                                                  | المادة                                                                                                                            |
| 9      | المعامل          | شعبة العلوم الرياضية "أ" و"ب" - خيار فرنسية -                              | الشعبة أو المسلك                                                                                                                  |

### INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

### COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et répartis sur 4 pages et suivant les domaines comme ci-dessous :

|            |                                          |        |             |
|------------|------------------------------------------|--------|-------------|
| Exercice 1 | Fonction logarithme suites et intégrales | Page 2 | 9.75 points |
| Exercice 3 | Nombres complexes                        | page3  | 3.5 points  |
| Exercice 4 | Structure algébriques                    | page 4 | 3.75 points |
| Exercice 5 | Arithmétique                             | Page 5 | 3 points    |

- $\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes
- On désigne par  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$
- $|z|$  désigne le module du nombre complexe  $z$
- $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien

|    |                                                                                                                                         |     |        |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--------|
| SM | الامتحان الوطني التجريبي الاول للبيكالوريا - ابريل 2024 - الموضوع<br>- مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية "أ" و "ب" - خيار فرنسية- | BL1 | الصفحة |
|    |                                                                                                                                         |     | 2<br>5 |

### Exercice : 1 ( 9.75 Points )

#### Partie I

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $I = [0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x - \ln(x)} ; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et on pose  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 0.25 1) a) Montrer que  $(\forall x \in ]0, +\infty[) : x - \ln(x) > 0$
- 0.75 b) Montrer que  $f$  est continue sur  $I$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0.25 c) Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite au point 0
- 0.5 2) Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right) (f(x))^2$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$
- 0.5 3) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 ( $n \geq 2$ )
- 0.5 a) Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet exactement dans  $I$  deux solutions distinctes  $a_n$  et  $b_n$  tels que :  $0 < a_n \leq 1 < b_n$
- 0.5 b) Montrer que  $\forall n \geq 2; n < b_n$  en déduire la limite de la suite  $(b_n)_{n \geq 2}$
- 0.5 c) Montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  est décroissante en déduire qu'elle est convergente
- 0.75 d) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a_n)}{n}$
- 4) Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$
- 0.5 a) Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer
- 0.75 b) Soit  $n \geq 2$ , montrer que  $g^{-1}$  est dérivable au point  $\frac{1}{n}$  et que  $(g^{-1})' \left( \frac{1}{n} \right) = \frac{n^2 b_n}{1 - b_n}$
- 1 5) Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$  la courbe de la fonction  $g^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

#### Partie II

Soit  $F$  la fonction définie sur  $I = [0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt ; \text{ si } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- 0.25 1) a) Montrer que  $\left( \forall x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[ \right) (\exists c \in ]x, 2x[) : F(x) = \frac{x}{c - \ln(c)}$
- 0.5 b) Montrer que  $F$  est dérivable à droite en 0 (Remarque que  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$ )
- 0.25 2) a) Montrer que  $\forall x \geq 1; F(x) = \int_x^{2x} \left( 1 - \frac{1}{t} \right) f(t) dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t} f(t) dt$
- 0.5 b) Montrer que  $\forall x \geq 1; \frac{\ln(2)}{2x - \ln(2x)} \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} f(t) dt \leq \frac{\ln(2)}{x - \ln(x)}$
- 0.5 c) Montrer que  $\forall x \geq 1 : \int_x^{2x} \left( 1 - \frac{1}{t} \right) f(t) dt = \ln \left( 1 + \frac{x - \ln(2)}{x - \ln(x)} \right)$
- 0.5 d) Déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0.5 3) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $\forall x \in ]0, +\infty[; F'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}$
- 0.5 4) Soit  $\alpha \in ]0, +\infty[$ , on désigne par  $\mathcal{A}(\alpha)$  l'aire du domaine du plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations :  $x = \alpha$  et  $x = 2\alpha$ , pour quelle valeur de  $\alpha$  la valeur de  $\mathcal{A}(\alpha)$  est maximale

|      |                                                                                                                                        |     |        |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--------|
| $SM$ | الامتحان الوطني التجريبي الاول للبكالوريا - ابريل 2024 – الموضوع<br>- مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية "أ" و "ب" - خيار فرنسية- | BL1 | الصفحة |
|      |                                                                                                                                        |     | 3<br>5 |

### Exercice : 2 ( 3.5 Points )

Les parties I et II sont indépendantes

#### Partie I

Soit  $m$  un nombre réel strictement positif ( $m > 0$ )

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(E) : z^2 + m(1 + 2i)z + m^2(1 + 7i) = 0$

0.25 1) Déterminer dans  $\mathbb{C}$  les deux racines carrées du nombre complexe :  $-7 - 24i$

0.5 2) Déterminer  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation  $(E)$  tel que :  $Re(z_1) < 0$

0.5 3) Montrer que :  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \frac{-3\pi}{4}}$

4) Dans cette question on pose  $z_1 = mre^{i\theta}$  tel que  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$

0.5 Donner en fonction de  $r$  et  $\theta$  la forme exponentielle du nombre complexe  $1 + 7i$

#### Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$  et  $B$  respectivement d'affixes  $a = 1$  et  $b = -1$ .

Et soit l'application  $f$  du plan qui à tout point  $M(z)$  différent de  $A$  associe le point

$$M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{z - 1}{1 - \bar{z}}$$

1) Soit  $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

0.5 a) Montrer que  $\frac{z' - 1}{z - 1} = \frac{-(z + \bar{z} - 2)}{|z - 1|^2}$ , en déduire que les points  $A$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés

0.25 b) Si  $z' \neq -1$  et  $Im(z') \neq 0$ , montrer que les droites  $(BM')$  et  $(AM)$  sont perpendiculaires

0.25 c) Sans calculer  $z'$ , construire les points  $M$  et  $M'$  si  $z = 3i$

2) On considère dans  $\mathbb{C}$  le système  $(S)$ ; 
$$\begin{cases} z' = \frac{1}{6}(z + 2)^2 \\ |z| = \sqrt{2} \end{cases}$$

0.75 Montrer que si  $z$  est une solution du système  $(S)$  alors  $z$  est une solution de l'équation  $(z^2 + 2)(z - 4) = 0$  puis recoudre le système  $(S)$

|           |                                                                                                                                       |     |        |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--------|
| <i>SM</i> | الامتحان الوطني التجريبي الاول للبكالوريا - ابريل 2024 – الموضوع<br>- مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية "أ" و"ب" - خيار فرنسية- | BL1 | الصفحة |
|           |                                                                                                                                       |     | 4<br>5 |

**Exercice : 3** ( 3.75 Points )

Les deux parties I et II sont indépendantes

**Partie I**

On rappelle que  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \text{ et } y = b$

On munit  $\mathbb{R}^2$  de la loi de composition interne  $T$  définie par :

$$(\forall (x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4) \quad (x, y)T(a, b) = (x + a + xa, y + b)$$

- 0.5 1) Montrer que la loi  $T$  est commutative et associative.
- 0.25 2) Montrer que  $(\mathbb{R}^2, T)$  admet un élément neutre que l'on déterminera.
- 0.5 3) Déterminer l'ensemble des couples symétrisables dans  $\mathbb{R}^2$  pour la loi  $T$ .
- 4) On considère l'ensemble  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq -1\}$
- 0.25 a) Montrer que  $G$  est une partie stable de  $(\mathbb{R}^2, T)$
- 0.5 b) En déduire que  $(G, T)$  est un groupe commutatif.

**Partie II**

On rappelle que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau non commutatif unitaire d'unité  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Soit } E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

- 0.25 1) Montrer que  $(E, +)$  est un groupe commutatif
- 0.25 2) On pose  $E^* = E - \left\{ M(0) \right\}$ , montrer que  $E^*$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
- 3) Soit l'application  $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$   

$$x \longmapsto M\left(\frac{x}{2}\right)$$
- 0.5 a) Montrer que  $f$  est isomorphisme de  $(\mathbb{R}^*, \times)$  vers  $(E^*, \times)$
- 0.5 b) Montrer que  $(E, +, \times)$  est un corps commutatif
- 0.25 4) On pose  $H = \left\{ M(e^x) / x \in \mathbb{R} \right\}$ , montrer que  $H$  est un sous groupe de  $(E^*, \times)$

|           |                                                                                                                                        |     |        |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--------|
| <i>SM</i> | الامتحان الوطني التجريبي الاول للبكالوريا - ابريل 2024 – الموضوع<br>- مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية "أ" و "ب" - خيار فرنسية- | BL1 | الصفحة |
|           |                                                                                                                                        |     | 5<br>5 |

**Exercice : 4 ( 3 Points )**

Les deux parties I et II sont indépendantes

**Partie I**

**0.5** 1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(F) : 11x - 7y = 1$

**0.25** 2) En déduire les entiers relatifs  $a$  vérifiant : 
$$\begin{cases} a \equiv 1 [11] \\ a \equiv 2 [7] \end{cases}$$

**Partie II**

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers positifs distincts et soit  $a$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  tels que :

$$p \wedge a = 1 \text{ et } q \wedge a = 1$$

On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(E) : ax \equiv 1 [pq]$

**0.5** 1) Montrer que :  $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [p]$  et  $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [q]$

**0.5** 2) En déduire que le nombre :  $x_0 = a^{(p-1)(q-1)-1}$  est une solution de l'équation  $(E)$ .

**0.5** 3) Montrer que :  $(E) \iff ax \equiv ax_0 [pq]$

**0.5** 4) En déduire l'ensemble de solution de l'équation  $(E)$

**0.25** 5) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $10x \equiv 1 [33]$