

Fonctions logarithmes

Nationaux de 2010 à 2021- 2ème Bac sciences économiques et de gestion

Rattrapage 2021 (Ex.1)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x - x \ln x$$

1. 1.a. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$

1.b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2. 2.a. Vérifier que : $g(e) = -e$

2.b. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$g(x) + x = (x+1)(1 - \ln x)$$

puis résoudre l'équation $g(x) = -x$

3. Ci-dessous voici le tableau de variations de g :

x	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$			-	
$g(x)$		1		$-e$

Donner, à l'aide du tableau de variations de g , l'image de l'intervalle $[1, e]$ par g

Rattrapage 2021 (Ex.2)

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, (Δ) est la droite d'équation $y = x - 1$ et (C_f) est la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$$

1. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

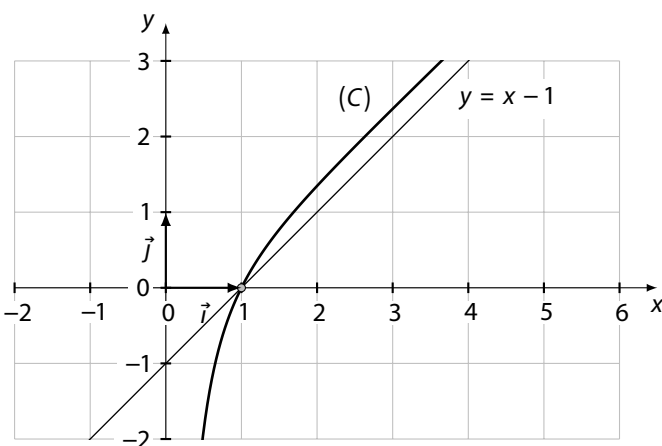
et donner une interprétation géométrique du résultat.

2. Justifier par le calcul que la droite (Δ) est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$

3. Ci-dessous, (C_f) est la représentation graphique de f

3.a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$

3.b. Donner graphiquement le signe de $f(x) - (x - 1)$ sur $]0, 1]$ puis sur $[1, +\infty[$



Ordinaire 2021 (Ex.1)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

1. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2. 2.a. Montrer que : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$

2.b. Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$

3. 3.a. Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g(1)$ puis dresser le tableau de variations de g .

3.b. À partir du tableau de variations de g , donner le signe de $g(x)$ sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$

3.c. À l'aide du tableau de variations, résoudre l'inéquation :

$$1 + e^2 + \ln x \geq \frac{1}{x^2}$$

Ordinaire 2021 (Ex.2)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$$

1. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. 2.a. Montrer que : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x}(2 \ln x - 1)$

2.b. Montrer que $f'(x) \leq 0$ sur $]0, \sqrt{e}]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[\sqrt{e}, +\infty[$

2.c. Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$

2.d. Calculer $f(\sqrt{e})$ et $f(e)$ puis dresser le tableau de variations de f .

3. À partir du tableau de variations de f :

3.a. Donner la valeur minimale de f sur $]0, +\infty[$

3.b. Déterminer l'image de l'intervalle $[\sqrt{e}, e]$ par f .

Rattrapage 2020

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$$

1. Montrer que $g'(x) = 2\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$

3. Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g (le calcul des limites n'est pas demandé)

4. Dédurre du tableau de variations que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$

Partie B :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

et donner une interprétation géométrique du résultat.

2. 2.a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- 2.b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \right)$

puis donner une interprétation géométrique du résultat.

3. 3.a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

- 3.b. Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

- 3.c. En déduire que f est croissante sur $]0, +\infty[$

4. Soit (D) la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$

- 4.a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et de la courbe (C)

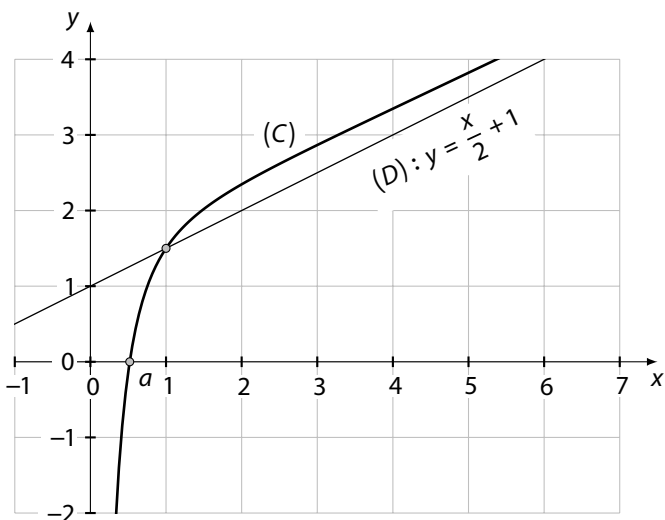
- 4.b. Étudier le signe de $\left(f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \right)$ sur $]0, +\infty[$ et en déduire la position relative de (C) par rapport à (D)

5. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ et donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$

6. Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f et (D) la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit a l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$

Donner à partir de la courbe (C) le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$



Ordinaire 2020

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

1. Montrer que $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

2. Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$

3. Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g (sans calculer les limites)

4. En déduire que $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ et que $g(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$

Partie B :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right) \ln x$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

et donner une interprétation géométrique du résultat.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

puis donner une interprétation géométrique du résultat.

3. 3.a. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

- 3.b. En déduire que le signe de $f'(x)$ sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$

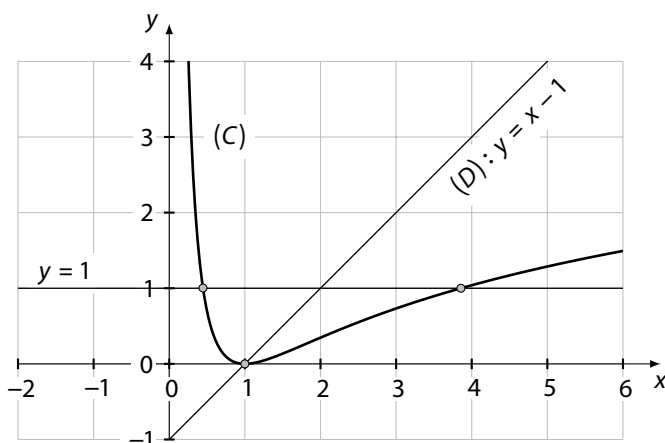
- 3.c. Calculer $f(1)$ et dresser le tableau de variations de f .

4. Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f et (D) la droite d'équation $y = x - 1$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 4.a. Résoudre graphiquement sur $]0, +\infty[$ l'inéquation :

$$f(x) \leq x - 1$$

- 4.b. Déterminer graphiquement sur $]0, +\infty[$ le nombre des solutions de l'équation : $f(x) = 1$



Rattrapage 2019

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - \ln x) \ln x$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

2. 2.a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- 2.b. On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

- 2.c. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x}(1 - 2 \ln x)$

3. 3.a. Montrer que f est croissante sur $]0, \sqrt{e}]$ et qu'elle est décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$

- 3.b. Calculer $f(\sqrt{e})$ puis dresser le tableau de variations de f .

- 3.c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

3.d. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$

4. 4.a. Montrer que $f''(x) = \frac{1}{x^2}(2 \ln x - 3)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

4.b. Montrer que $A\left(e^{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{4}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f)

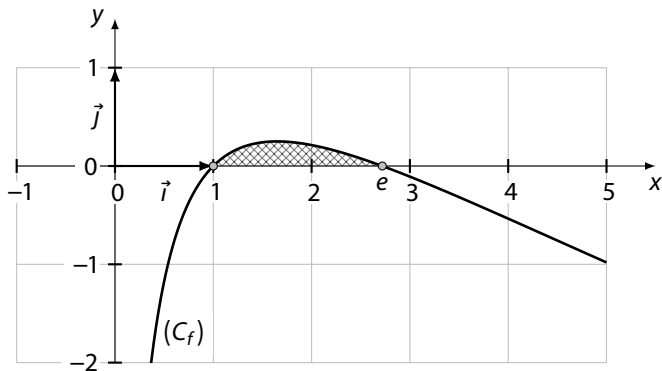
5. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f , et soit F la fonction définie par :

$$F(x) = -x(\ln x)^2 + 3x \ln x - 3x$$

5.a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$

5.b. À partir de la courbe (C_f) ci-dessous, donner les variations de F sur $]0, +\infty[$

5.c. Calculer l'aire de la partie hachurée.



Ordinaire 2018

Partie I :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

et donner une interprétation géométrique du résultat.

2. 2.a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2.b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

2.c. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(x) - x)$

et donner une interprétation géométrique du résultat.

3. 3.a. Montrer que : $\forall x > 0, f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

3.b. Calculer $f(1)$ et dresser le tableau de variations de f .

3.c. En déduire le signe de f sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$

3.d. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1

4. Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4.a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e \ln x \, dx = 1$$

4.b. Montrer que l'aire de la partie hachurée est égale à :

$$\frac{1}{2}(e^2 - 1) \text{ u.a.} \quad (\text{u.a signifie unité d'aire})$$

Partie II :

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

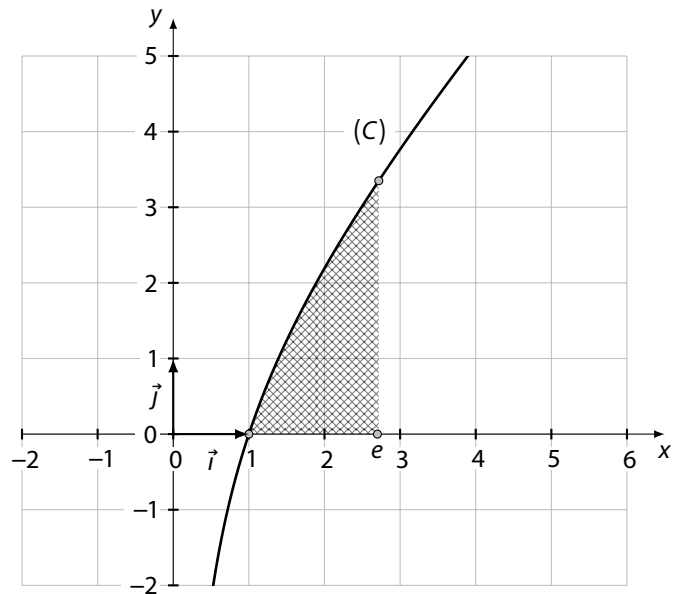
$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-1+2 \ln x)$$

1. Montrer que : $\forall x > 0, g'(x) = f(x)$

2. En utilisant le résultat de la question 3-c) de la partie I, montrer que g est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$

3. 3.a. Que représente la fonction g pour la fonction f ? (justifier la réponse)

3.b. En déduire, sans calcul, la valeur de $g(e) - g(1)$ (justifier la réponse)



Ordinaire 2017

Partie I :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 - \frac{2}{x} + \ln x$$

1. Calculer $g'(x)$ et en déduire que g est croissante sur $]0, +\infty[$

2. 2.a. Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g (Le calcul des limites en 0 et en $+\infty$ n'est pas demandé)

2.b. En déduire le signe de g sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$

Partie II :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x-2) \ln x$$

1. Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

2. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3. 3.a. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

3.b. Calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f\left(\frac{1}{e}\right)$

puis dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$

3.c. En utilisant le tableau de variations déterminer l'image par f de l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 2\right]$

Première partie :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

1. 1.a. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$
- 1.b. Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
2. 2.a. Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[: g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$
- 2.b. Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$
- 2.c. Calculer $g(1)$ puis donner le tableau de variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$
- 2.d. Dédire du tableau de variations de g que $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ et que $g(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$

Deuxième partie :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + x \ln x$$

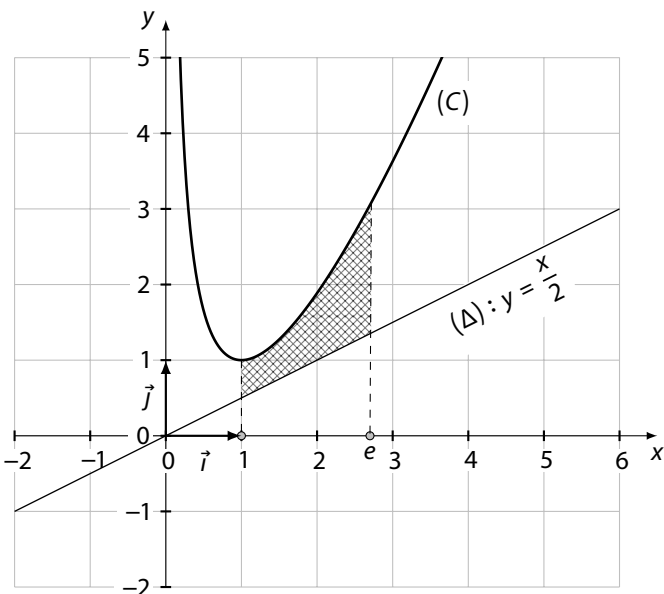
et soit (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 1.a. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$
puis donner une interprétation géométrique du résultat.
- 1.b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
puis donner une interprétation géométrique du résultat.
2. 2.a. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$
- 2.b. Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de f
3. On considère la fonction numérique F définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \ln x$$

Montrer que F est une fonction primitive de f sur $]0, +\infty[$

4. Dans la figure ci-dessous (C) est la représentation graphique de f et (Δ) est la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$
Calculer l'aire de la partie hachurée.



Partie I :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 - \ln x$$

1. Montrer que $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$
2. Étudier le signe de $g'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$
3. Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g
(le calcul des limites n'est pas demandé)
4. En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$

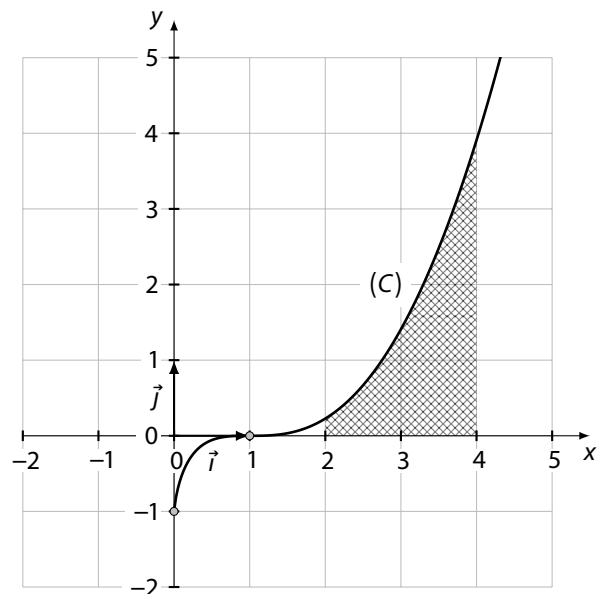
Partie II :

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -1$
2. 2.a. Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$:
$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}\right)$$
- 2.b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
puis donner une interprétation géométrique du résultat.
3. 3.a. Montrer que $f'(x) = 2g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$
- 3.b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$
4. Montrer que la courbe représentative (C) admet un point d'inflexion I dont on précisera le couple des coordonnées.
5. En utilisant une intégration par parties montrer que :
$$\int_2^4 2x \ln x \, dx = 28 \ln 2 - 6$$
6. En déduire l'aire de la partie hachurée dans la figure ci-dessous



Ordinaire 2015

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{2}{x} + \ln x$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 1.a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

1.b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2. 2.a. Vérifier que $f(x) = x + \frac{2 + x \ln x}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

2.b. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

3. 3.a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

3.b. Vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$ et étudier le signe de l'expression $(x-1)(x+2)$ sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $[1, +\infty[$

3.c. En déduire que la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1[$

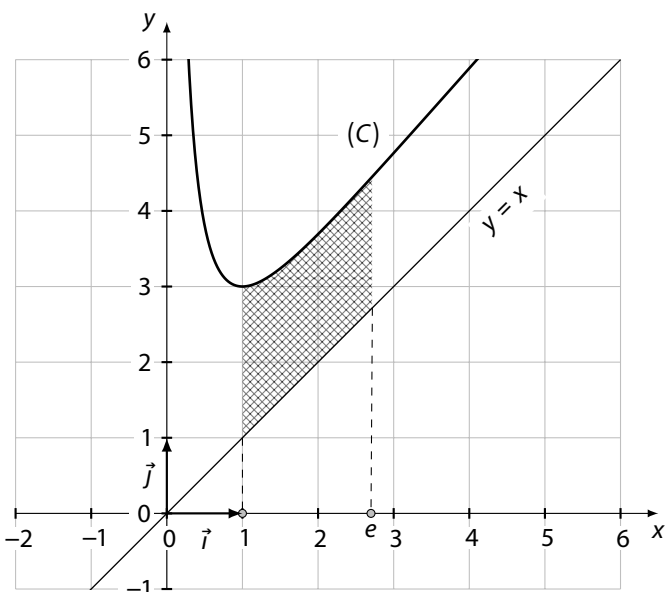
3.d. Dresser le tableau de variations de f .

4. 4.a. Vérifier que $f''(x) = \frac{4-x}{x^3}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

4.b. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

5. 5.a. En intégrant par parties, montrer que : $\int_1^e \ln x \, dx = 1$

5.b. Calculer l'aire de la partie hachurée dans la figure ci-dessous.



Rattrapage 2013

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x \ln x)^2 + 3x^2 - 3$$

1. 1.a. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$

1.b. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -3$

2. 2.a. Pour tout x de $]0, +\infty[$ calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = 2x \left(\left(\frac{1}{2} + \ln x \right)^2 + \frac{11}{4} \right)$$

2.b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$

2.c. Donner le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$

2.d. Calculer $f(1)$ et déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$

Ordinaire 2013

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2. Vérifier que $f(x) = \frac{1+x \ln x}{x}$ et calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

3. 3.a. Montrer que $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

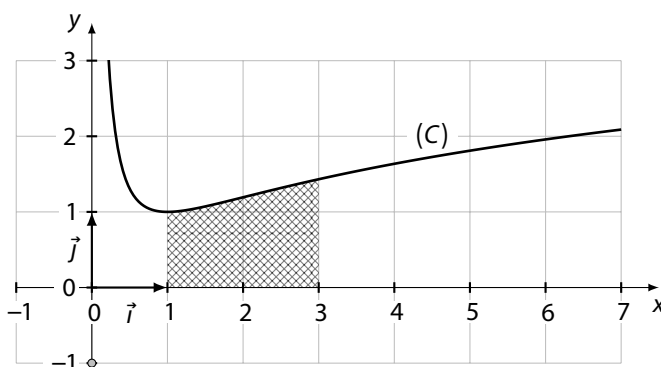
3.b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

4. Montrer que $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

5. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis montrer que $I\left(2, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .

6. 6.a. En utilisant une intégration par parties calculer : $\int_1^3 \ln x \, dx$

6.b. Calculer l'aire de la partie hachurée dans la figure ci-dessous.



Ordinaire 2012

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -1 + \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. 1.a. Calculer la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

1.b. Donner une interprétation géométrique du résultat.

2. 2.a. Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$ puis la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

2.b. Donner une interprétation géométrique du résultat.

3. 3.a. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[: f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right)$

3.b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ et poser le tableau de variations de f .

4. 4.a. Montrer que $f''(x) = 2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et en déduire la concavité de la courbe (C)

4.b. Recopier le tableau suivant sur votre copie, et le compléter.

x	$\frac{1}{2}$	1	e
$f(x)$			

4.c. Montrer que $y = -3x + 3$ est l'équation de la droite tangente à (C) au point $A(1, 0)$

5. Construire les points de (C) d'abscisses respectivement $\frac{1}{2}$, 1 et e et la tangente à (C) au point A puis construire la courbe (C)
(On prendra $\frac{1}{e} \approx 0,4$ et $\ln 2 \approx 0,7$)

Ordinaire 2011 (Ex.1)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t^2 - 3t + 2 = 0$

2. En déduire dans $]0; +\infty[$:

2.a. Les deux solutions de l'équation : $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$

2.b. L'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 < 0$$

Ordinaire 2011 (Ex.2)

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -x + \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$$

Première partie :

1. Montrer que $g'(x) = -\left(2x + \frac{1}{x}\right)$

puis déterminer le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$

2. 2.a. Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g (le calcul des limites aux bornes de $]0; +\infty[$ n'est pas demandé)

2.b. Déduire que :

$$\forall x \in]0, 1], g(x) \geq 0 \text{ et que : } \forall x \in]1; +\infty[, g(x) < 0$$

3. Montrer que : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Deuxième partie :

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. 1.a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1.b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que (C) admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = -x$

1.c. Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

2. Calculer $f(1)$ et dresser le tableau de variations de f (on pourra utiliser le résultat de la question 3 de la première partie)

3. Tracer la courbe (C)

(On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse $e^{\frac{3}{2}}$ et que $e^{\frac{3}{2}} \approx 4,5$ et que $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \approx -4$)

Ordinaire 2010

Première partie :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = -1 + x + 2x \ln x$$

1. Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2. 2.a. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[: g(x) = 3 + 2 \ln x$

2.b. Étudier le signe de $g'(x)$ puis donner le tableau de variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$

2.c. Calculer $g(1)$ et déduire de la question 2.b.) que pour tout x de $]0, 1] : g(x) \leq 0$ et que pour x de $]1, +\infty[: g(x) \geq 0$

Deuxième partie :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - x + x^2 \ln x$$

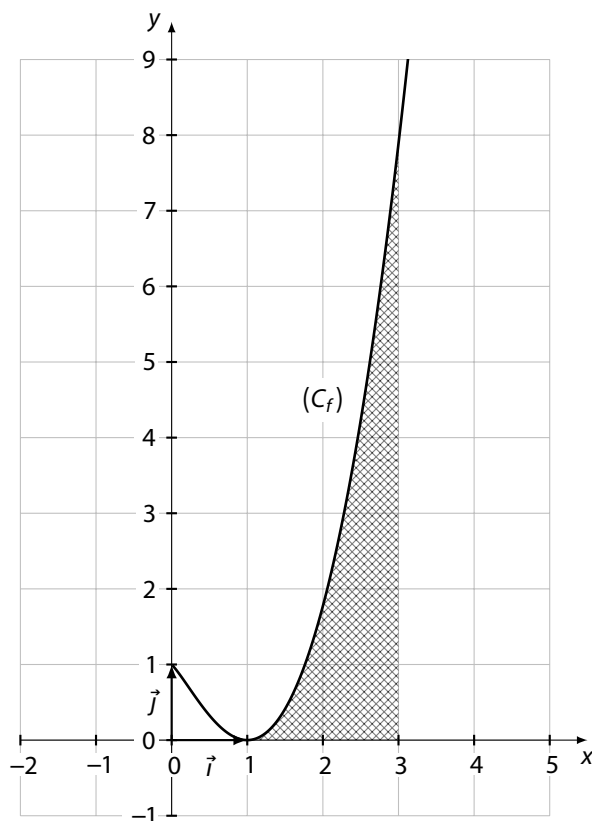
1. 1.a. Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1.b. Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2. 2.a. Vérifier que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

2.b. En utilisant la question 2.c.) de la première partie, dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$

3. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de la fonction f sur $]0, 3]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$



3.a. En utilisant une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^3 x^2 \ln x \, dx = 9 \ln 3 - \frac{26}{9}$$

3.b. En déduire l'aire de la partie hachurée.