

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : Structures algébriques	3.5 points
— Exercice 2 : Nombres complexes	3.5 points
— Exercice 3 : Arithmétiques	3 points
— Exercice 4 : Problème d'analyse	10 points

- ♠ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z
- ♠ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice

nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) ; (x + yi)(a + bi) = xa + (x^2b + a^2y)i$$

0,25 pt

1 - a) Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

0,5 pt

b) Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

0,25 pt

c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera .

0,25 pt

d) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x + yi$ admet le nombre complexe $\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$.

0,25 pt

2 - On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par : $E = \{x + yi / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R}\}$

0,5 pt

a) Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

0,5 pt

b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt

3 - On considère le sous-ensemble G de E défini par : $G = \{1 + yi / y \in \mathbb{R}\}$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E, *)$.

0,25 pt

4 - On considère l'ensemble $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \right\}$

0,5 pt

a) Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

b) On considère l'application $\varphi : E \rightarrow F$

$$x + yi \mapsto M(x^2, y)$$

Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$

0,25 pt

c) En déduire que $(F, \times)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$)

I - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1 + i)(1 + m)z + 2im = 0$$

0,25 pt

1 - a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0,5 pt

b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E)

2 - On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

0,5 pt

a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$.

0,25 pt

b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II - Le plan complexe rapporté un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

On considère les points suivants :

A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + i$, $b = (1 + i)m$ et $c = 1 - i$

D l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

1 - a) Montrer que l'affixe de Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$.

b) Calculer $\frac{b-a}{\omega}$.

c) En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$.

2 - La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

a) Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est réel et que $\frac{h}{b-a}$ est imaginaire pur.

b) En déduire h en fonction de m .

Exercice 3 : (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$

1 - On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n .

a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z}) : u \times n \equiv 1 \pmod{2969}$

b) En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1 \pmod{2969}$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1 \pmod{2969}$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

c) Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

d) En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1 \pmod{2969}$.

2 - a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n .

b) Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969} \iff n \equiv 0 \pmod{2969}$ et $m \equiv 0 \pmod{2969}$.

Exercice 4 : (10 points)

PARTIE I - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right)$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 - a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$

b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

c) Montrer que : $\exists! \alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$ tel que $f(\alpha) = 0$ (On prendra $e^{\frac{3}{2}} = 4.5$)

d) Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

3 - a) En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f' , montrer qu'il existe x_0 de l'intervalle $]0; 1[$ tel que : $f''(x_0) = 0$

- 0,5 pt b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'' , montrer que pour tout x différent de x_0 de l'intervalle $[0; 1]$, on a : $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$
- 0,25 pt c) En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.
- 0,5 pt 4 - a) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.
- 0,5 pt b) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$, $f(1) = -0,5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)
- 0,25 pt 5 - a) Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty; \alpha]) ; f(x) \leq 0$
- 0,75 pt b) Montrer que : $\int_0^\alpha f(x)dx = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 3)}{3}$, puis en déduire que : $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$
- 0,5 pt c) Calculer en fonction de α , en cm^2 , l'aire du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$

PARTIE II - On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n + f(u_n)$$

- 0,5 pt 1 - a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < \alpha$ (utiliser 5-a) de la PARTIE I)
- 0,25 pt b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 0,5 pt 2 - On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
- 0,5 pt a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) > 0$ (On prendra : $\ln(2) = 0,69$)
- 0,5 pt b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n$
(On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$)
- 0,25 pt c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente
- 0,5 pt d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 0,5 pt 3 - On suppose que $u_0 < 0$
- 0,5 pt a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$
- 0,5 pt b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0 + nf(u_0)$
- 0,25 pt c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

FIN

1/2019 N

EXERCICE 4. (Analyse)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 4x(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1)$$

1°) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -4t(e^t - \frac{1}{2}t - 1) \quad (\text{avec } t = -x) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -4t^2 \left(\frac{e^t}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{t} \right) = -\infty \left(+\infty - \frac{1}{2} - 0 \right) = -\infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1) = +\infty(0 + \infty - 1) = +\infty$$

c/c $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2°) a) Derivabilité et dérivée de f .

on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \rightarrow 4x$; $x \rightarrow e^{-x}$; $x \rightarrow \frac{1}{2}x - 1$ dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= 4(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1) + 4x(-e^{-x} + \frac{1}{2}) \\ &= 4e^{-x} + 2x - 4 - 4xe^{-x} + 2x = 4(e^{-x} - xe^{-x} + x - 1) \\ &= 4(e^{-x}(1-x) - (1-x)) = 4(1-x)(e^{-x} - 1). \end{aligned}$$

c/c f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(1-x)(e^{-x} - 1)$

b) variations de f puis tableau de variations:

on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(1-x)(e^{-x} - 1)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-
$e^{-x}-1$	+	0	-	-
$f'(x)$	+	0	-	+

c/c f est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$
 f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

tableau de variations de f .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	+	0	-	+
f	$-\infty$	0	$4(e^{-1}-\frac{1}{2})$	$+\infty$

③ Existence de α ?

2

on a f est continue sur $]\frac{3}{2}, 2[$ (car f dérivable sur $\mathbb{R}$)

et f strictement croissante sur $]\frac{3}{2}, 2[$

donc f bijective de $]\frac{3}{2}, 2[$ vers $J = f(]\frac{3}{2}, 2[) =]f(\frac{3}{2}), f(2)[$

$$=]6(\frac{1}{e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}}), \frac{2}{e^2}[$$

or $0 \in J$ car $e^{\frac{3}{2}} = 4,5 > 4 \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4} < 0$

donc 0 admet un antécédent unique α dans $]\frac{3}{2}, 2[$

c/c $\exists! \alpha \in]\frac{3}{2}, 2[/ f(\alpha) = 0$

④ vérification:

on sait que $f(\alpha) = 0$ donc $4\alpha(e^{-\alpha} + \frac{1}{2}\alpha - 1) = 0$

$$\text{or } \alpha \neq 0 \Rightarrow e^{-\alpha} + \frac{1}{2}\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{c/c } e^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha$$

3°/a Th de Rolle: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$

donc $\begin{cases} f' \text{ cont sur } [0, 1] & \text{car } (x \mapsto e^{-x} \text{ et } x \mapsto 1-x \text{ cont}) \\ f' \text{ dérivable sur }]0, 1[& \text{car } x \mapsto e^{-x} \text{ et } x \mapsto 1-x \text{ dérivable} \\ f'(0) = f'(1) = 0 \end{cases}$

donc d'après Th de Rolle $\exists x_0 \in]0, 1[/ f''(x_0) = 0$

$$\text{c/c } \exists x_0 \in]0, 1[/ f''(x_0) = 0$$

⑤ Th des accroissements finis.

$$\text{on a } f''(x) = 4(-e^{-x})(1-x) + 4(e^{-x} - 1)(-1)$$

donc f'' est dérivable sur $]0, 1[$ et f'' cont sur $[0, 1]$ (car...)

donc d'après Th des accroissements finis ($\forall x \in [0, 1]$) avec $x \neq x_0$

$$\exists c \in]0, 1[/ \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = f'''(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{x - x_0} = f'''(c) = 4e^{-c}(1 - c) > 0$$

$$\text{c/c } \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \text{ et } x \neq x_0$$

(3)

③ deduction

on a $f''(x_0) = 0$ ①

puis $\frac{f''(x)}{x-x_0} > 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f''(x) > 0 \text{ si } x > x_0 \\ f''(x) < 0 \text{ si } x < x_0 \end{array} \right\} \text{ ②}$

4° f'' s'annule en x_0 en changeant de signe donc $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

4° ⑤ les branches infinies.

① on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4(e^t - \frac{1}{2}t - 1)$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} 4t(\frac{e^t}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{t}) = +\infty(+\infty - \frac{1}{2} - 0) = +\infty$

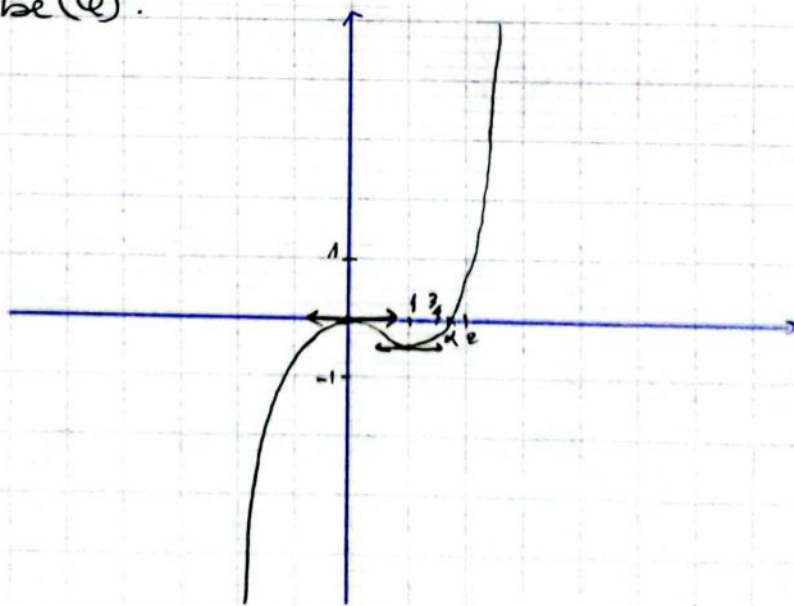
4° donc $(\mathcal{C})$ admet une direction asymptotique parallèle à (OY) au voisinage de $-\infty$.

② on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1) = 4(0 + \infty - 1) = +\infty$

4° $(\mathcal{C})$ admet une direction asymptotique parallèle à (OY) au voisinage de $+\infty$.

⑤ la courbe $(\mathcal{C})$.



5°/a) Vérifions $f(x) \leq 0$ sur $]-\infty, \alpha]$.

④

⊗ Sur $]-\infty, 0]$ on a f strict croissante
donc $x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) \leq 0$

⊗ Sur $[0, 1]$ on a f strict décroissante.
donc $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \leq 0$. ($f(1) = 0$)

* Sur $[1, \alpha]$ on a f strict croissante.
donc $1 \leq x \leq \alpha \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(\alpha) \Rightarrow f(x) \leq 0$ ($f(1) = 0$)

✓ $\forall x \in]-\infty, \alpha] \quad f(x) \leq 0$

⑥ Mq $\int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)$?

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha 4x(e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 - 1) dx$$

$$\text{on pose } U' = e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad V = 4x \quad U = -e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 - x \quad V' = 4$$

donc d'après le principe de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha f(x) dx &= \left[4x(-e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 - x) \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha (-4e^{-x} + x^2 - 4x) dx \\ &= 4\alpha(-e^{-\alpha} + \frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha) - \left[4e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_0^\alpha \\ &= 4\alpha(-e^{-\alpha} + \frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha) - (4e^{-\alpha} + \frac{1}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4) \end{aligned}$$

$$\text{or } e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_0^\alpha f(x) dx &= 4\alpha\left(\frac{\alpha}{2} - 1 + \frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha\right) - \left(4 - 2\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4\right) \\ &= \dots = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3). \end{aligned}$$

$$\text{✓/✓, } \int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)$$

⊗ déduire $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$?

on a $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0]$ donc $f(x) \leq 0$ sur $[0, \alpha]$
(donc $f(x) \leq 0$ et $\alpha - 0 > 0 \Rightarrow \int_0^\alpha f(x) dx \leq 0$)

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3) \leq 0 \Rightarrow \frac{2}{3}(\alpha)(\alpha + \sqrt{3})(\alpha - \sqrt{3}) \leq 0$$

$$\Rightarrow \alpha - \sqrt{3} \leq 0 \quad (\text{car } \alpha > 0)$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \sqrt{3}.$$

$\forall$ on a $x > \frac{3}{2}$ et $x \leq \sqrt{3}$ donc $\frac{3}{2} < x \leq \sqrt{3}$
 $(\cos \alpha \in]\frac{3}{2}, 1])$

5

© la surface.

L'aire du domaine limité par (C) et les droites d'éq $y=0$
 $x=0$ et $x=d$ est

$$A = \int_0^d (f(x) - 0) dx \times 1 \text{ cm}^2.$$

on a ~~soit~~ $I = \int_0^d f(x) dx = \frac{2}{3} x (x^2 - 3)$

$\forall$ $A = \frac{2}{3} x (x^2 - 3) \text{ cm}^2.$

Partie II

6

$$u_0 < d \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) + u_n.$$

$$1^\circ \text{ Mq } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < d ?$$

on pose $g(x) = f(x) + x$.
 ~~g continue sur $] -\infty, d[$ et g dérivable sur $] -\infty, d[$
et $\forall x \in] -\infty, d[\quad g'(x) = f'(x) + 1$~~

pour $n=0$ on a $u_0 < d$ vraie.

Sup la prop vraie pour n fixée c-à-d $u_n < d$.
montrons que $u_{n+1} < d$?

$$\text{on a } u_{n+1} = f(u_n) + u_n \text{ or } u_n < d \Rightarrow f(u_n) \leq 0 \text{ d'après (I-5°-a)}$$

$$\text{donc } u_{n+1} \leq u_n < d$$

c/c d'après les principe de la récurrence
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < d$.

(b) (u_n) décroissante ?

$$\text{on a } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < d \Rightarrow f(u_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) \leq 0$$

c/c (u_n) est une suite décroissante.

$$2^\circ \text{ on suppose } 0 \leq u_0 < d. \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

$$\textcircled{a} \text{ Mq } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0 ?$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \quad \text{donc } g \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ \text{et } \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln(2)$$

$$\textcircled{b} g \text{ croissante sur } [\ln(2), +\infty[\Rightarrow \forall x \in [\ln(2), +\infty[$$

$$x > \ln(2) \Rightarrow g(x) > g(\ln(2)) \Rightarrow g(x) > \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$> -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) > 0$$

$$\textcircled{c} g \text{ décroissante sur }]-\infty, \ln(2)[\Rightarrow \forall x \in]-\infty, \ln(2)[$$

$$x \leq \ln(2) \Rightarrow g(x) \geq g(\ln(2)) \Rightarrow \dots \Rightarrow g(x) > 0$$

c/c $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0$

⑥ Mq $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 0$.

pour $n=0$ on a $U_0 \geq 0$ vraie.

Sup la prop vraie pour n fixée. donc $U_n \geq 0$

Mq $U_{n+1} \geq 0$?

$$\begin{aligned} \text{on a } U_{n+1} &= f(U_n) + U_n = 4U_n(e^{-U_n} + \frac{1}{2}U_n - 1) + U_n \\ &= 4U_n(e^{-U_n} + \frac{1}{2}U_n - \frac{3}{4}) = 4U_n g(U_n) \geq 0 \end{aligned}$$

c/c d'après le principe de la récurrence
 $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \geq 0$.

⑦ Mq (U_n) convergente.

on a (U_n) décroissante et (U_n) minorée par 0
 car $(\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 0)$ donc (U_n) est convergente.
 et sa limite $l \in [0, d]$. (car $0 \leq U_n < d$)

c/c (U_n) convergente et sa limite $l \in [0, d]$.

⑧ $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$?

on (U_n) convergente et sa limite $l \in [0, d]$.

donc puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n) + U_n$

donc l est sol de l'équation
 avec $x \in [0, d]$. $x = f(x) + x$.

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

or $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = d$.

donc puisque (U_n) est décroissante

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq U_0 < d$.
 donc $l < d$

c/c $\lim U_n = 0$

soit $h(n) = f(n) + n$ $I = [0, d]$
 on a h continue ; $h(I) \subset I$ (car ...)
 $U_{n+1} = h(U_n) (\forall n \in \mathbb{N})$; (U_n) convergente.

3°/ on suppose $U_0 < 0$.

(8)

① Mq $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_n \leq f(U_0) ?$

on a $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_n = f(U_n)$

or on a (U_n) décroissante $\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq U_0 < 0$

et f croissante sur $] -\infty, 0]$

donc $f(U_n) \leq f(U_0)$

c/c $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_n \leq f(U_0)$

② Mq $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq U_0 + n f(U_0) ?$

(on a d'abord $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} \leq U_n + f(U_0)$.)

pour $n=0 \quad U_0 \leq U_0 + 0 f(U_0)$ vraie.

sup la prop vraie pour n fixé donc $U_n \leq U_0 + n f(U_0)$

Mq $U_{n+1} \leq U_0 + (n+1) f(U_0) ?$

on a $U_{n+1} \leq U_n + f(U_0) \leq U_0 + n f(U_0) + f(U_0) \leq U_0 + (n+1) f(U_0)$

c/c d'après le principe de la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$U_n \leq U_0 + n f(U_0)$

③ Deducire $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n ?$

on a $U_0 < 0 \Rightarrow f(U_0) < 0$ d'après (partie 1)

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq U_0 + n f(U_0)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} U_0 + n f(U_0) = -\infty$

donc d'après l'ordre des bornes on a

c/c $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = -\infty$

EXERCICE 3 (Arithmétique)

9

2969 premier. $n, m \in \mathbb{N} / n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$

1°/ on suppose 2969 ne divise pas n

① Mq $\exists u \in \mathbb{Z} \quad u \times n \equiv 1 [2969]$

on a 2969 premier et 2969 ne divise pas n donc

$2969 \nmid n \Rightarrow \text{donc d'après Bezout}$

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} / u \times n + v \times 2969 = 1$$

$$\Rightarrow u \times n + v \times 2969 \equiv 1 [2969]$$

$$\Rightarrow u \times n \equiv 1 [2969]$$

$$\text{c/c } \exists u \in \mathbb{Z} / u \times n \equiv 1 [2969]$$

6°/ Deducions :

$$\textcircled{*} \text{ on a } u \times n \equiv 1 [2969] \Rightarrow (u \times n)^8 \equiv 1 [2969]$$

$$\text{or } n^8 \equiv -m^8 [2969] \Rightarrow u^8 \times n^8 \equiv -u^8 \times m^8 [2969]$$

$$\Rightarrow (u \times n)^8 \equiv -(u \times m)^8 [2969]$$

$$\Rightarrow (u \times m)^8 \equiv -1 [2969]$$

$$\textcircled{*} \text{ on a } (u \times m)^8 \equiv -1 [2969] \text{ et } 8 \times 371 = 2968$$

$$\Rightarrow (u \times m)^{2968} \equiv (-1)^{371} [2969] \Rightarrow (u \times m)^{2968} \equiv -1 [2969]$$

$$\text{c/c } (u \times m)^8 \equiv -1 [2969] \text{ et } (u \times m)^{2968} \equiv -1 [2968]$$

② Mq 2969 ne divise pas $u \times m$?

$$\text{on a } (u \times m)^8 \equiv -1 [2969]$$

$$\text{Supposons } 2969 / u \times m \Rightarrow u \times m \equiv 0 [2969]$$

$$\Rightarrow (u \times m)^8 \equiv 0 [2969] \Rightarrow 0 \equiv -1 [2969]$$

contradiction

c/c d'après le principe de l'absurde 2969 ne divise pas $u \times m$

d) deduire $(uxm)^{2968} \equiv 1 [2969]$

10

on a $\begin{cases} 2969 \text{ premier positif.} \\ 2969 \wedge (uxm) = 1 \end{cases}$ car 2969 ne divise pas (uxm) et 2969 premier.

donc d'apres th de Fermat

$$(uxm)^{2968} \equiv 1 [2969].$$

c/c $(uxm)^{2968} \equiv 1 [2969]$

2°/a) Mq 2969 divise n.?

on a vu que si 2969 ne divise pas n en a.

$$(uxm)^{2968} \equiv -1 [2969] \text{ et } (uxm)^{2968} \equiv 1 [2968]$$

$$\Rightarrow -1 \equiv 1 [2969] \Rightarrow 2 \equiv 0 [2969] \Rightarrow 2969/2 \text{ absurde.}$$

c/c par l'absurde on a donc 2969 divise n.

⑥ Montrons l'equivalence.

on a: $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969] \Rightarrow 2969/n \Rightarrow n \equiv 0 [2969]$

donc $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969] \Leftrightarrow m^8 \equiv 0 [2969] \text{ et } n \equiv 0 [2969]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2969/m^8 \\ n \equiv 0 [2969] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2969/m \\ n \equiv 0 [2969] \end{cases} \text{ car 2969 premier.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \equiv 0 [2969] \\ n \equiv 0 [2969] \end{cases}$$

c/c $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969] \Leftrightarrow n \equiv 0 [2969] \text{ et } m \equiv 0 [2969]$

EXERCICE 2 (Complexes)

11

$$m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad (E): \quad z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

1°/a) le discriminant de (E) non nul.

$$(E): \quad z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (1+i)^2(1+m)^2 - 4(2im) = 2i(m^2 + 2m + 1) - 8im \\ &= 2i(m^2 - 2m + 1) = ((1+i)(m-1))^2. \end{aligned}$$

c/c $\Delta \neq 0$ car $1+i \neq 0$ et $m \neq 1$ car $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

b) Det z_1 et z_2 ?

$$(E) \Rightarrow z_1 = \frac{(1+i)(1+m) - (1+i)(m-1)}{2} = (1+i)$$

$$z_2 = \frac{(1+i)(m+1) + (1+i)(m-1)}{2} = (1+i)m$$

$$c/c \quad z_1 = 1+i \quad \text{et} \quad z_2 = (1+i)m$$

2°/ on suppose $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

a) module et un argument de $z_1 + z_2$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1+i)(1+m) = (1+i)(1+e^{i\theta}) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} 2\cos\frac{\theta}{2} = 2\sqrt{2} \cos\frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

$$\text{or } \theta \in]0, \pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0$$

$$c/c \quad |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2} \cos\frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \arg(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \quad (\text{un argument de } z_1 + z_2)$$

$$b) \text{ Mq: } z_1, z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 + z_2 = 2i$$

$$\begin{aligned} z_1, z_2 \in \mathbb{R} &\Rightarrow 2im \in \mathbb{R} \Rightarrow m \in i\mathbb{R} \Rightarrow m = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (\text{car } \theta \in]0, \pi[\\ &\Rightarrow m = i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = (1+i)(1+i) = 2i.$$

$$c/c \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 + z_2 = 2i$$

$$\text{II/ } A(1+i) \quad B(1+i)m \quad C(1-i)$$

12

1°/a) Ω milieu de $[CD]$?

déterminons d'abord z_D ?

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{donc } R(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z'| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{z} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z' = z e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \underline{z' = iz}$$

$$D \text{ image de } B \text{ par } R \Rightarrow z_D = iz_B = i(1+i)m$$

$$\Rightarrow \underline{z_D = (i-1)m}$$

$$\Omega \text{ milieu de } [CD] \Rightarrow z_\Omega = \frac{z_C + z_D}{2}$$

$$\Rightarrow w = \frac{1-i + (i-1)m}{2} = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

$$\text{c/c } z_D = (i-1)m \text{ et } w = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

b) calcul de $\frac{b-a}{w}$?

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{w} &= \frac{2(1+i)m - (1+i)}{(1-i)(1-m)} = \frac{2(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)} = -2 \frac{(1+i)}{(1-i)} \\ &= -2 \frac{(1+i)^2}{2} = -2i \end{aligned}$$

$$\text{c/c } \frac{b-a}{w} = -2i$$

c) Deduction.

$$\text{on a } \frac{b-a}{w} = -2i \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_\Omega - z_D} = -2i$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_B - z_A}{z_\Omega - z_D} \right| = 2$$

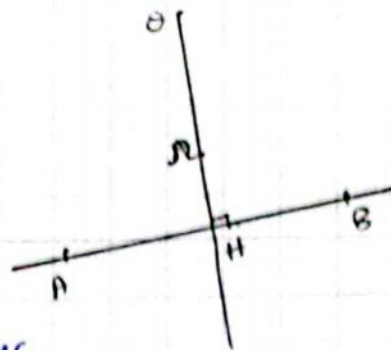
$$\left(\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_\Omega - z_D}\right) = -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_B - z_A| = 2 |z_\Omega - z_D| \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_\Omega - z_D}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = 2\Omega\Omega \text{ et } (AB) \perp (\Omega\Omega)$$

$$\text{c/c } (\Omega\Omega) \perp (AB) \text{ et } AB = 2\Omega\Omega$$

$$2^\circ \textcircled{a} (O, z) \cap (AB) = \{H\}$$



13

on a ~~O, z, H alignés~~ donc

$$A, B, H \text{ alignés} \Rightarrow \frac{z_H - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R}$$

$$(OH) \perp (AB) \Rightarrow \frac{z_H - z_O}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \frac{h-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{b-a} \text{ l'iminaire pur.}$$

$$\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R}$$

⑥ Deduire h en fonction de m ?

$$\begin{cases} \frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R} \\ \frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\bar{h}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{h-a}{b-a} \\ \frac{\bar{h}}{\bar{b}-\bar{a}} = -\frac{h}{b-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{h}-\bar{a})(b-a) = (h-a)(\bar{b}-\bar{a}) \\ \bar{h}(b-a) = -h(\bar{b}-\bar{a}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{h}(b-a) - h(\bar{b}-\bar{a}) = \bar{a}(b-a) - a(\bar{b}-\bar{a}) & \textcircled{1} \\ \bar{h}(b-a) + h(\bar{b}-\bar{a}) = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Leftrightarrow 2h(\bar{b}-\bar{a}) = -\bar{a}(b-a) + a(\bar{b}-\bar{a}) = a\bar{b} - \bar{a}b$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow h &= \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{2(\bar{b}-\bar{a})} = \frac{(1+i)(1-i)\bar{m} - (1-i)(1+i)m}{2((1-i)\bar{m} - (1-i))} \\ &= \frac{2\bar{m} - 2m}{2(1-i)(\bar{m}-1)} = \frac{\bar{m} - m}{(1-i)(\bar{m}-1)} \end{aligned}$$

EXERCICE 1 (Structures)

14

$$(x+iy) * (a+ib) = ax + (x^2b + a^2y)i$$

1°/ (a) commutativité

on a $\forall (a+bi), (c+di) \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(a+ib) * (c+id) &= ac + (c^2b + a^2d)i \\ &= ca + (a^2d + b^2c)i = (c+id) * (a+ib).\end{aligned}$$

$\therefore *$ est commutative dans $\mathbb{C}$.

(b) Associativité

$\forall (a+ib), (c+id), (e+if) \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(a+ib) * ((c+id) * (e+if)) &= (a+ib) * (ce + i(c^2f + e^2d)) \\ &= ace + (a^2(c^2f + e^2d) + (ce)^2b)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((a+ib) * (c+id)) * (e+if) &= (ac + i(a^2d + bc^2)) * (e+if) \\ &= ace + i(a^2c^2f + (a^2d + bc^2)e^2)\end{aligned}$$

$$\text{donc } ((a+ib) * (c+id)) * (e+if) = (a+ib) * ((c+id) * (e+if))$$

$\therefore *$ associative dans $\mathbb{C}$.

(c) l'élément neutre ?

on remarque que $\forall x+iy \in \mathbb{C}$

$$(x+iy) * (1+0i) = x+iy \quad \text{et } *$$

donc $e=1$ est un élément neutre de $(\mathbb{C}, *)$

et puisque l'élément neutre quand il existe il est unique

donc $e=1$ est l'élément neutre de $(\mathbb{C}, *)$

$\therefore e=1$ est l'élément neutre de $(\mathbb{C}, *)$

(d) l'élément symétrique

$\forall x+iy \in \mathbb{C}$ avec $x \neq 0$

$$(x+iy) * \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}i\right) = \left(1 + i\left(-\frac{y}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right)\right) = 1 = e$$

$\therefore \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}i$ est le symétrique de $x+iy$ dans $(\mathbb{C}, *)$ quand $x \neq 0$.

2°/ $E = \{x+iy \mid x \in \mathbb{R}^{*+}, y \in \mathbb{R}\}$

① Mq E stable pour $*$ dans $\mathbb{C}$.

$E \neq \emptyset$ car $e=1 \in E$ et $E \subset \mathbb{C}$
 $\forall (a+ib), (c+id) \in E$

$(a+ib) * (c+id) = ac + i(a^2d + bc^2) \in E$ car $\begin{matrix} a > 0 \\ c > 0 \end{matrix} \Rightarrow ac > 0$

$\therefore E$ est stable dans $(\mathbb{C}, *)$

② Mq $(E, *)$ gr com?

on a $E \neq \emptyset$ et $E \subset \mathbb{C}$.

④ $*$ loi de comp interne dans E .

⑤ $*$ associative dans E et $E \subset \mathbb{C}$ donc $*$ associative dans E

⑥ $*$ commutative dans E et $E \subset \mathbb{C}$ donc $*$ commutative dans E

⑦ $e=1$ est l'élément neutre de $(\mathbb{C}, *)$ et $e=1 \in E$ donc $e=1$ est l'élément neutre de $(E, *)$.

⑧ $\forall a+ib \in E$ on a $a \neq 0$ (car $a > 0$) donc le symétrique de $a+ib$ dans $\mathbb{C}$ est $(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}i) \in E$ (car $\frac{1}{a} > 0$)
 donc $(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}i)$ est le symétrique de $(a+ib)$ dans E .

$\therefore (E, *)$ est un groupe commutatif.

3°/ $G = \{1+iy \mid y \in \mathbb{R}\}$. Mq G sous groupe de $(E, *)$?

on a $G \neq \emptyset$ car $e=1 \in G$ et $G \subset E$ et $(E, *)$ groupe commutatif. et

$\forall (1+ib), (1+id) \in G$

$(1+ib) * (1+id) = (1+ib) * (1-i(-d)) = 1 + i(-d+b) \in E$

$\therefore G$ est un sous groupe de $(E, *)$.

4°/ $F = \{M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^{*+}, y \in \mathbb{R}\}$.

a) F stable pour $*$ dans $M_2(\mathbb{R})$

on a $F \neq \emptyset$ car $M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in F$ et $F \subset M_2(\mathbb{R})$.

$\forall M(a,b), M(c,d) \in F$.

$M(a,b) * M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix} = M(ac, ad+bc) \in F$

$\mathbb{C}$ Fast stable pour 'x' dans $\mathbb{H}_2(\mathbb{R})$.

b) $\varphi: (E, *) \longrightarrow (F, \times) \quad \text{Mq } \varphi \text{ isomorphisme}$
 $x+iy \longmapsto M(x^2, y).$

⊗ l'homomorphisme des lois?

$E = \{x+iy / x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

$\forall a+ib \text{ et } c+id \in E$

$\varphi((a+ib) * (c+id)) = \varphi(a+ic + i(a^2d+bc^2)) = M(a^2c^2, a^2d+bc^2)$

$\varphi(a+ib) \times \varphi(c+id) = M(a^2, b) \times M(c^2, d) = M(a^2c^2, a^2d+bc^2)$

donc $\varphi((a+ib) * (c+id)) = \varphi(a+ib) \times \varphi(c+id).$

* bijectif. Montrons que $(\forall M(a,b) \in F)(\exists x+iy \in E)$

$\varphi(x+iy) = M(a,b) ?$

$\varphi(x+iy) = M(a,b) \Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a,b)$

$\Leftrightarrow x^2 = a \text{ et } y = b \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ et } y = b$
 (car x et a positifs)

$\Leftrightarrow x+iy = \sqrt{a} + i \cdot b.$

donc φ est surjective et

et puisque la set de $x+iy$ est unique donc φ est bijective.

$\mathbb{C}$ φ est un isomorphisme de $(E, *) \longrightarrow (F, \times).$

Ⓢ Deduction :

on a $(E, *)$ groupe commutatif. et φ isomorphisme
 de $(E, *)$ vers $(F, \times)$ donc $(F, \times)$ groupe commutatif