

Ensemble

Définition

Toute collection d'objets est appelée un ensemble, tout objet de cette collection est appelé un élément de cet ensemble.

Différentes manières d'écrire un ensemble

- 1- **En extension** : en donnant la liste de tous ses éléments
- 2- **En compréhension** : en caractérisant ses éléments par une propriété.

Partie d'un ensemble

On appelle une partie d'un ensemble tout ensemble dont tous les éléments sont des éléments de cet ensemble.

On convient qu'il existe un ensemble qui ne contient aucun élément et qu'on note par $\emptyset$ ou par $\{ \}$, et on convient qu'il est partie de tout ensemble.

Tout ensemble est partie de lui-même.

L'ensemble des parties d'un ensemble est noté par $\mathcal{P}(E)$.

Soit x un élément, on a : $x \in E \Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(E)$.

Soit A un ensemble, on a : $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$.

Cardinal d'un ensemble

Si E est un ensemble fini, c.à.d qui a un nombre fini d'éléments et si ce nombre est n alors on dit que le cardinal de E est égal à n et on écrit :

$\text{card}(E) = n$. Par exemple, $\text{card}(\{a, b, c\}) = 3$

Propriété : Si $\text{card}(E) = n$ alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Inclusion et égalité

$$A \subset B \Leftrightarrow [(\forall x \in E), x \in A \Rightarrow x \in B]$$

$$A = B \Leftrightarrow [A \subset B \text{ et } B \subset A]$$

$$A = B \Leftrightarrow [(\forall x \in E), x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

Intersection et réunion

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$$(\forall x \in E), x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$(\forall x \in E), x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

$$A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B$$

$$A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B$$

Différence de deux parties

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

$$(\forall x \in E), x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$$

Complémentaire

$$\bar{A} = E \setminus A = C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$$

$$(\forall x \in E), x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

$$A \cup \bar{A} = E \text{ et } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Différence symétrique de deux parties

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$(\forall x \in E), x \in A \Delta B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)$$

Propriétés

$$1) A \cap B = B \cap A$$

$$2) A \cup B = B \cup A$$

$$3) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$4) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$5) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$6) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$7) A \cap A = A$$

$$8) A \cup E = E$$

$$9) A \cup \emptyset = A$$

$$10) A \cup A = A$$

$$11) A \cap E = A$$

$$12) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$13) A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$$

$$14) A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$$

$$15) A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$16) \bar{\bar{A}} = A$$

$$17) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$18) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$19) A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$

$$20) \bar{A} = \emptyset \Leftrightarrow A = E$$

$$21) A \Delta B = B \Delta A$$

$$22) A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

$$23) A \Delta \emptyset = A$$

$$24) A \Delta A = \emptyset$$

$$25) A \Delta E = \bar{A}$$

Produit cartésien

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$$

$$(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F$$

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

$$(x, y) \neq (x', y') \Leftrightarrow x \neq x' \text{ ou } y \neq y'$$

Si E et F sont finis alors $E \times F$ est fini

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

$$E^2 = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in E\}$$

$$E \times F \times G = \{(x, y, z) / x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } z \in G\}$$