Lycée abde el moumne | Série 03 : Les applications | 1BAC SM | Prof : Fayssal

Exercice 1

1) On considère l'application f tel que :

$f:\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\to\mathbb{R}$; $x\mapsto f(x)=1-\sqrt{2x-3}$

Déterminer $f(\{2;6;;7\})$ et $f([2;6])$

2) On considère l'application g tel que :

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $x\mapsto g(x)=x^2+2$

Montrer que : $g([0;+\infty[)=[2;+\infty[$

Exercice 2

Soient f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que :

$x\mapsto f(x)=x^2+2x+2$

1) Résoudre dans IR l'équation $f(x)=0$
   f est-elle surjective ?
2) f est-elle injective ? justifier ?
3) Déterminer $f^{-1}(\{2\})$
4) Déterminer $f^{-1}([5;10])$ et $f^{-1}([0;+\infty[)$
5) Déterminer $f(\mathbb{R})$; $f([-1;+\infty[)$; $f(]-\infty;-1])$

Exercice 3

Soient f *et* g deux applications tel que :

$f:]1;+\infty[\to[1;+\infty[$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=x^2-2x+2$; $x\mapsto g(x)=cos(x)$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f
4) Montrer que g ni injective ni surjective

Exercice 4 :

Soit f une application tel que :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $x\mapsto f(x)=x^2-4x+1$

1) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)=f(4-x)$
   b) On déduire que f n'est pas injective
2) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)\geq -3$
   b) On déduire que g n'est pas surjective

Exercice 5 :

f applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$x\mapsto f(x)=\frac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$
2) Montrer que f n'est pas injective
3) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $f(x)\leq\frac{1}{4}$
4) Montrer que f n'est pas surjective

Exercice 6

Soient f *et* g deux applications tel que :

$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$(x,y)\mapsto(x+3y,x-y)$; $(n;p)\mapsto n+p$

1) Calculer $f((1;0))$ *et* $g((0;2))$
2) Déterminer $g^{-1}(\{3\})$ puis en déduire que l'application g n'est pas injective
3) Montrer que f est bijective
4) Déterminer $f(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

Exercice 7 :

Soit f une application de E vers F

et A et B sont deux partie de l'ensemble E

et C et D sont deux partie de l'ensemble F

1) Montrer que : $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$
2) Montrer que : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
3) Montrer que : $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$
4) Montrer que : $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$
5) Montrer que $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

Exercice 8 :

1) *Soient*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 3x+1$; $x\mapsto x^2-1$

a) Déterminer gof *et* fog

b) A- t-on $gof=fog$?

2) Soit h tel que: $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$; $x\mapsto x-2\sqrt{x}$

Décomposer h en deux applications u et v

Exercice 9 :

Soient $f:E\to F$ et $f:E\to G$ deux applications

1) Montrer que :
   gof *injective* $\Rightarrow f$ *injective*
2) Monter que
   gof *surjective* $\Rightarrow g$ *surjective*
3) Montrer que :
   gof *injective et* f *surjective* $\Rightarrow g$ *injective*

Exercice 10

Soient f *et* g deux applications tel que :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g:\mathbb{R}\to]0;+\infty[$

$x\mapsto x+\sqrt{x^2+1}$; $x\mapsto x+\sqrt{x^2+1}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}; x+\sqrt{x^2+1}>0$
   b) En déduire que f n'est pas surjective
2) Déterminer $f^{-1}(]-\infty;2])$
3) Montrer que $f(\mathbb{R})=]0;+\infty[$
4) Montrer que f est injective
5) Montrer que g est bijective puis déterminer son application réciproque g^{-1}