



I- Dénombrement :

1)- Principe du produit :

○ Introduction :

Question : Combien de code peut-on former à l'aide d'une voyelle suivie d'un nombre parmi 1, 2 ou 3 ?

Il y a 6 voyelles : a,e,i,o,u et y, donc pour le 1er choisir une voyelle on dispose de 6 possibilités. Pour chaque voyelle il y a 3 possibilité de choisir un nombre parmi 1,2 ou 3. Donc le nombre de codes possibles est : $N = 6 \times 3 = 18$.

✓ Principe du produit :

On considère une expérience aléatoire formée de deux choix, si le 1er choix offre n_1 possibilités et le 2ème choix offre n_2 possibilités, alors le nombre de choix total est :

$$N = n_1 \times n_2 .$$

○ Remarque :

Le principe du produit se généralise à une expérience aléatoire formée de p choix, où $p \geq 2$. Dans ce cas le nombre de choix total est : $N = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$.

○ Exemple :

De combien de manières peut-on garer 4 voitures dans 6 places vides dans un parking ? Pour la 1ère voiture on dispose de 6 possibilités, pour la 2ème il en reste 5, pour la 3ème il en reste 4 et pour la 4ème il en reste 3.

D'après le principe du produit, le total des possibilités pour garer les 4 voitures est :

$$N = 6 \times 5 \times 4 \times 3 . \text{ Soit } 360 \text{ possibilités.}$$

2)- Arrangements et Combinaisons :

a)- Arrangements avec répétition :

○ Introduction :

On considère un dé cubique dont les 6 faces sont numérotées : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Si on lance ce dé 3 fois de suite, alors chaque possibilité

est triplet (a,b,c) Où a,b et c sont choisis parmi les éléments de l'ensemble

$$E = \{1,2,3,4,5,6\} .$$

toute possibilité est appelée arrangement avec répétition de 3 élément parmi 6.

(éventuellement un élément de l'ensemble E peut apparaître plusieurs fois)

D'après le principe du produit, le nombre total de possibilités est : $N = 6 \times 6 \times 6 = 6^3$.

○ Propriété 01 :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments choisis parmi n est : $N = n^p$.





6)- Arrangements sans répétition :

○ Introduction :

On veut former un nombre n de 3 chiffres $n = \overline{cdu}$ choisis parmi 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On exige de plus que tous les chiffres soient distincts deux à deux.

toute possibilité est un triplet (a, b, c) . Où a, b et c sont distincts deux à deux et choisis parmi les éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

toute possibilité est appelée arrangement sans répétition de 3 élément parmi 6.

D'après le principe du produit, le nombre total de possibilités est : $N = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

Ce nombre est noté : A_6^3 , donc $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

○ Propriété 02 :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que : $p \leq n$.

Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments choisis parmi n est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}.$$

cas particulier :

Si $p = n$, alors tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n est appelé permutation à n éléments.

Le nombre de permutations à n éléments est : $A_n^n = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1}_{n \text{ facteurs}}.$

Ce nombre est noté $n!$ qu'on lit factoriel n , donc : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

○ Exemple :

De combien de manières on peut ranger 5 livres dans 5 tiroirs de sorte que chaque tiroir ne peut contenir plus d'un livre ?

Toute possibilité est une permutation à 5 éléments, donc le nombre total de possibilités pour ranger les 5 livres dans les 5 tiroirs est : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

c)- Combinaisons :

○ Introduction :

On considère l'ensemble : $E = \{a, b, c, d\}$.

-- La liste de toutes les parties de E formés de 2 éléments est : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, ces parties sont appelés combinaison à 2 éléments parmi 4.

Leurs nombre est noté C_4^2 , donc : $C_4^2 = 6$.

-- La liste de toutes les combinaisons à 3 éléments parmi 4 est : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ et $\{b, c, d\}$. Leurs nombre est : $C_4^3 = 4$.

○ Propriété 03 :

Soient n et p deux entiers naturels .

Le nombre de combinaison à p éléments choisis parmi n est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

3)- Différents types de tirages :

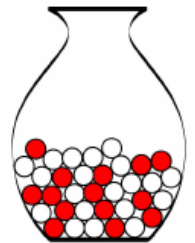
On considère une urne contenant **10** boules numérotées de **1** jusqu'à **10**

Pour tirer 3 boules de cette urne, il y a 3 types de tirages possibles :

-- Tirage simultané :

Lorsqu'on tire les 3 boules simultanément, toute possibilité est une combinaison de 3 éléments choisis parmi **10** . Le nombre de tirages

possible dans ce cas est : $C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$.



-- Tirage successif avec remise :

Si l'on tire 3 boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne On dit qu'on a effectué un tirage successif avec remise . Chaque possibilité dans cas est un arrangement avec répétition de 3 éléments parmi **10** et le nombre de tirages possibles est :

$$10^3 = 1000 .$$

-- Tirage successif sans remise :

Si l'on tire 3 boules l'une après l'autre sans remettre aucune boule dans l'urne , on dit qu'on a effectué un tirage successif sans remise . Chaque possibilité est un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi **10** et le nombre de tirages possibles est :

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720 .$$

II- Probabilité sur un ensemble fini :

1)- Vocabulaire des probabilités :

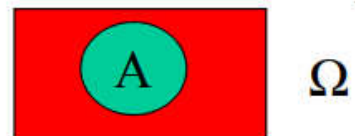
Expérience aléatoire : expérience dont le résultat ne peut pas être connu avec certitude .

Univers : est l'ensemble de toutes les possibilités d'une expérience aléatoire qu'on note Ω .

On pose : $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, n est appelé cardinal de Ω . On écrit : $n = \text{card}(\Omega)$.

Événement : c'est toute partie A de Ω . Les singletons de Ω (les parties formées d'un seul élément) sont appelés événements élémentaires .

L'événement contraire : d'un événement A noté $\bar{A}$ est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A .



On dit qu'un événement A est réalisé si le résultat de l'expérience donne issue à une possibilité appartenant à A , $\emptyset$ est appelé événement impossible et Ω événement certain .

Événements incompatibles : deux événements A et B sont dit incompatibles si et seulement si : $A \cap B = \emptyset$.

**2)- Probabilité sur un ensemble fini :****✓ Expérience 01 :**

On considère un dé parfait dont les 6 faces sont numérotées : 1, 2, 3, 4, 5 et 6 .

Si on lance ce dé une seule fois, alors l'univers est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Et comme le dé est parfait, alors toutes les possibilités ont la même chance d'apparition

(une chance parmi 6), on écrit : $p(\{1\}) = p(\{2\}) = \dots = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

Remarquez que : $\sum_{k=1}^6 p(\{k\}) = 1$.

✓ Expérience 02 :

On considère maintenant un dé dont une face est numérotée 1 deux faces chacune numérotées 2 et trois faces chacune numérotées 3 .

Si on lance ce dé une seule fois , alors : $\Omega = \{1, 2, 3\}$ et dans ce cas , on a :

$p(\{1\}) = \frac{1}{6}$, $p(\{2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p(\{3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) = 1$.

○ Définition :

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est : $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Si on lie chaque possibilité $\{a_k\}$ avec un nombre positif p_k tels que : $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, on dit

qu'on a définie sur Ω une probabilité p et que (Ω, p) est un espace probabilisé fini .

p_k est appelé probabilité de l'événement élémentaire $\{a_k\}$, on écrit : $p(\{a_k\}) = p_k$.

✓ Probabilité d'un événement :

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini .

-- La probabilité d'un événement A notée $p(A)$, est égale à la somme des probabilités de tous les événements élémentaires qui constituent A .

En particulier : $p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = \sum_{k=1}^n p_k = 1$.

○ Exemple :

Dans l'exemple de l'expérience 02 , considérons l'événement :

A " Obtenir un nombre impair " on a $A = \{1, 3\}$, donc $p(A) = p(\{1\}) + p(\{3\})$

D'où : $p(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

○ Propriété 04 :

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini .

-- Si A est un événement quelconque, alors : $0 \leq p(A) \leq 1$.

-- Si A et B sont deux événements quelconques , alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) .$$

En particulier : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ et $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

3)- Equiprobabilité (ou probabilité uniforme) :

○ Définition :

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini tels que : $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ Où $n \geq 2$.

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité (ou que p est une équiprobabilité).

Cela veut dire que : $(\forall k \in \{1; 2; \dots; n\}); p(\{a_k\}) = \frac{1}{n}$.

○ Propriété 05 :

-- En cas d'équiprobabilité, pour tout événement A on a : $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

C'est à dire : $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$.

○ Exercice 01 :

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher : 2 boules blanches, 2 boules vertes et 3 boules rouges . On tire simultanément 2 boules de cette urne .

On considère les deux événements suivants :

A " les 2 boules tirées sont de même couleur "

B " parmi les deux boules tirées il y a au moins une boule rouge "

1)- Montrer que : $p(A) = \frac{5}{21}$.

2)- Calculer $p(\bar{B})$, puis en déduire $p(B)$.

3)- Calculer $p(A \cap B)$. (A et B sont-ils indépendants ? justifier votre réponse)

4)- Répondre aux questions précédentes , lors d'un tirage de 2 boules successivement et sans remise .

○ Exercice 02 :

Une urne contient 5 boules blanches , 4 boules rouges et une seule boule noire .

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher .

On tire de cette urne de façon aléatoire 3 boules .

Calculer la probabilité de l'événement : A " Obtenir une boule de chaque couleur " dans chacun des cas suivants :

- 1)- les 3 boules sont tirées simultanément .
- 2)- les 3 boules sont tirées successivement et sans remise .
- 2)- les 3 boules sont tirées successivement et avec remise .

III- Probabilité conditionnelle - événements indépendants :

1)- Probabilité conditionnelle :

○ Introduction :

Le tableau suivant est échantillon d'un établissement scolaire .

	Pratiquent l'anglais	Ne pratiquent pas l'anglais
Garçons	150	50
Filles	160	40

On choisit dans cet échantillon un élève au hasard et on considère événements :

A " L'élève choisi est un garçon " , B " L'élève choisi pratique l'anglais "

Et C " L'élève choisi pratique l'anglais sachant que c'est un garçon "

✓ Calculer $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ et $p(C)$, que constatez vous ?

○ Définition :

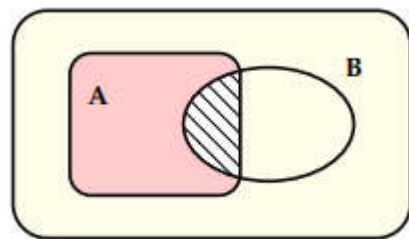
Soient A et B deux événements tels que : $p(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , le nombre noté $p_A(B)$ définie par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} .$$

✓ Remarque : En cas d'équiprobabilité

$$\text{on a : } p_B(A) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)} .$$



○ Exercice 03 :

On considère un dé cubique parfait dont les 6 faces sont numérotés : $\boxed{-1}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{0}$

$\boxed{1}$ et $\boxed{1}$. On lance ce dé deux fois de suite .

1)- Calculer la probabilité des deux événements suivants :

A " Obtenir deux nombres différents " et B " Obtenir deux nombres de somme nulle " .

2)- Sachant que la somme des deux nombres obtenu est non nulle, quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres différents ?

○ Exercice 04 :

Une urne contient trois boules rouges et cinq boules vertes . Les boules sont indiscernables au toucher .

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne .

On considère les événements suivants :

A " Les deux boules tirées sont rouges "

B " La première boule tirée est rouge "

C " La deuxième boule tirée est verte "

1)- Montrer que : $p(A) = \frac{3}{28}$ et $p(B) = \frac{21}{56}$.

2)- Calculer la probabilité conditionnelle $p_C(B)$. (B et C sont-ils indépendants) ?

○ Propriété 06 : (formule des probabilités composées)

-- Si A et B sont deux événements tels que : $p(A) \neq 0$, alors :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) .$$

2)- Formules des probabilités totales :

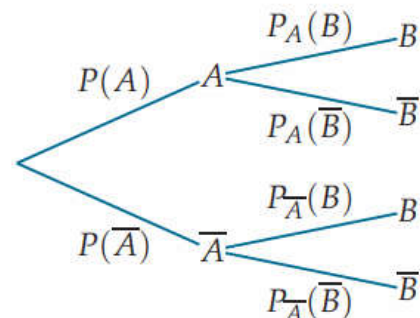
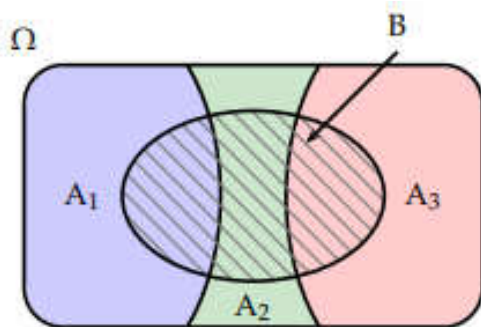
○ Définition :

On dit qu'un triplet d'événements (A_1, A_2, A_3) forment une partition de Ω Si ces événements sont disjoints 2 à 2 et leurs réunion est Ω .

○ Propriété 07 :

-- Si (A_1, A_2, A_3) est une partition de Ω , alors pour tout événement B , on a :

$$p(B) = p(A_1).p_{A_1}(B) + p(A_2).p_{A_2}(B) + p(A_3).p_{A_3}(B) .$$



○ Remarque :

Dans le cas d'une partition formée de deux événements $(A, \bar{A})$, la formule des probabilités totales devienne : $p(B) = p(A).p_A(B) + p(\bar{A}).p_{\bar{A}}(B)$.

Qu'on peut représenter sous forme d'un arbre pondéré comme ci-dessus .

○ Exercice 05 :

On dispose d'une urne contenant des boules indiscernables au toucher : quatre boules blanches et cinq boules noires .

On considère l'expérience suivante : on tire une première boule de l'urne si elle est blanche on la remet dans l'urne puis on tire simultanément deux boules ; si cette première boule est noire on ne la remet pas , puis on tire successivement et sans remise deux boules .

✓ Calculer la probabilité pour que les trois boules tirées soient de même couleur .

○ Exercice 06 :

Deux urnes semblable contiennent des boules indiscernables au toucher dont la composition est donné par le tableau suivant :

	U_1	U_2
Nombre de boules noires	2	3
Nombre de boules blanches	4	2

On choisit au hasard une urne et on tire simultanément deux boules .

1)- Sachant que les deux boules obtenues sont tirées de U_1 , quelle est la probabilité pour qu'elles soient noires ?

2)- Sachant que les deux boules obtenues sont noires , quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne U_1 ?

3)- Evénements indépendants :

✓ Introduction :

Soient A et B deux événements tels que :

$$p(A) = 0,3 \text{ et } p(B) = 0,5 \text{ et } p(A \cup B) = 0,65.$$

Montrer que : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ (On dit que A et B sont indépendants).

○ Définition :

On dit que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) .$$

○ Exercice 07 :

Dans une population, il y a 71% de porteurs de lunettes parmi lesquels 37% ont 55 ans ou plus . Dans cette même population, il y a 63% de personnes de moins de 55 ans .

On tire au sort une personne de cette population et on considère les deux événements :

A : " la personne a 55 ans ou plus " et L : " la personne porte des lunettes " .

✓ Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier la réponse .

○ Propriété 08 :

Si $p(A) \neq 0$ (ou $p(B) \neq 0$), alors A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p_A(B) = p(B) \text{ (ou } p_B(A) = p(A) \text{)} .$$

4)- Épreuves indépendantes - répétition d'une épreuve :

○ Définition :

On dit que des épreuves aléatoires sont indépendantes si les résultats de chaque épreuve n'ont aucune influence sur les résultats de l'épreuve suivante .

○ Exemples :

-- Lorsqu'on lance un dé ou une pièce de monnaie n fois de suite où $n \geq 2$, alors il s'agit de n épreuves indépendantes .

-- Lorsqu'on tire successivement et avec remise p parmi n où $p \geq 2$ et $n \geq 2$, alors il s'agit de p épreuves indépendantes .

-- Par contre, lorsqu'on tire successivement et sans remise p parmi n où $p \geq 2$ et $p \leq n$, alors il ne s'agit d'épreuves indépendantes . Vu que chaque épreuve influence l'épreuve suivante .

○ Propriété 09 :

Soit A un événement de probabilité p dans une seule épreuve aléatoire .

Si cette épreuve se répète n fois avec $n \geq 2$ et si toutes les épreuves sont indépendantes entre eux, alors la probabilité de réalisation de A exactement k fois parmi n est :

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \text{ Où } k \in \{0;1;2;3;\dots;n\} .$$

○ Exercice 08 :

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher et portant les nombres :

-2 **-1** **0** **1** **1** et **2** .

On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac .

1)- On considère après avoir effectué cette épreuve, les deux événements suivants :

A : " Parmi les boules tirées il y a au moins une boule portant le numéro 1 "

S : " la somme des nombres que portent les trois boules tirées est nulle " .

1)- Calculer $p(A)$ et montrer que : $p(S) = \frac{1}{5}$.

2)- On répète l'épreuve précédente 5 fois de suite (On remet à chaque fois les boules tirées dans le sac) .

✓ Quelle est la probabilité pour que l'événement S soit réalisé 3 fois exactement ?

○ Exercice 09 :

La probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est $p = 0,3$. On effectue n tirs supposés indépendants . On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs .

✓ Calculer la valeur minimale de n pour laquelle $p_n \geq 0,9$.



IV- Les variables aléatoires :

✓ Introduction :

○ Définition :

○ Exercice 10 :

1)- Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

2)- Paramètre d'une variable aléatoire :

3)- Loi binomiale :

Fin Du Sujet .