

Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Académie :
Casablanca-Settat

Direction
provinciale : Settat

Les capacités attendues

Contenus

✓ Utiliser la parité et la décomposition en produit de facteurs premiers pour résoudre des problèmes simples portant sur les entiers naturels.

✓ Les nombres pairs et les nombres impairs ;
✓ Multiples d'un nombre, le plus petit multiple commun de deux nombres ;
✓ Diviseurs d'un nombre, le plus grand diviseur commun de deux nombres ;
✓ Nombres premiers, décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.

Etablissement :
LYCEE SID HAJJAJ

Pr : Y. Achab

Niveau : TCSF

Durée : 7 heures

Degré d'importance
60%

Le contenu

Remarques

I. Nombres paires - Nombres impaires

Activité 1.

On considère les nombres : 0 ; 1 ; -3 ; 4 ; 5 ; 24 ; $\sqrt{25}$; 2017 ; 89 ; 1970 ; $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{36}}{3}$.

Parmi les nombres précédents trouver :

1. Tous les nombres entiers naturels.
2. Tous les nombres pairs.
3. Tous les nombres impairs.

1. Ensemble des nombres entiers naturels

Définition :

- Les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ tels que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Les nombres entiers naturels **non nuls** forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}^*$ tels que $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

Exemples.

- -3 est un entier naturel, on dit que 3 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$ et on écrit $3 \in \mathbb{N}$.
- -5 n'est pas un entier naturel, on dit que -5 n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{N}$ on écrit $-5 \notin \mathbb{N}$.
- 4 est un entier naturel non nul, on dit que 4 appartient à $\mathbb{N}^*$ et on écrit $4 \in \mathbb{N}^*$
- $\mathbb{N}^*$ est inclus dans $\mathbb{N}$ et on écrit $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$
- $\mathbb{N}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}^*$ et on écrit $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}^*$

Application 1

Compléter par $\in$; $\notin$; $\subset$ et $\not\subset$

$15 \dots \mathbb{N}$; $\frac{15}{3} \dots \mathbb{N}^*$; $\frac{2\pi}{3} \dots \mathbb{N}^*$; $\sqrt{12} \dots \mathbb{N}$

$\frac{\sqrt{25}}{5} \dots \mathbb{N}$; $\{0; 1; 5; 18\} \dots \mathbb{N}$; $\{-2; 1; 5; 18\} \dots \mathbb{N}$; $\{0; 1; 5; 8\} \dots \mathbb{N}^*$

2. Nombres paires - Nombres impaires

Définition :

Soit a un nombre entier naturel.

- On dit que a est un nombre pair s'il existe un nombre entier naturel k tel que : $a = 2k$.
- On dit que a est un nombre impair s'il existe un nombre entier naturel k tel que : $a = 2k + 1$.

Exemples.

- ✓ On a : $144 = 2 \times 72$, donc 144 est un nombre pair.
- ✓ On a : $161 = 2 \times 80 + 1$, donc 161 est un nombre impair

Application 2

Soient a et b deux nombres de $\mathbb{N}$. Compléter le tableau suivant :

Nombre	a	b	$a+b$	$a-b$ ($a > b$)	$a \times b$
Parité	Pair	Pair			
	Pair	Impair			
	Impair	Pair			
	Impair	Impair			

Exercice 1

1) Etudier la parité des nombres suivants : $1359+59321$; $978^2 - 65^2$; 732×753

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Etudier la parité des nombre suivants

$$A = 2n + 4 \quad ; \quad B = 6n + 11 \quad ; \quad C = 4n^2 + 8n + 13 \quad ; \quad D = n^2 + n \quad ; \quad E = 2^{n+1} + 27$$

II. Multiples d'un entier naturel- ppcm de deux entiers naturels

Activité 2.

1) Cocher les cases convenables :

	2	6	11	21	0	28	14	120
Multiple de 2								
Multiple de 3								
Multiple de 5								
Multiple de 9								

2) a)- Déterminer M_4 l'ensemble de multiples de 4.

b)- Déterminer M_6 l'ensemble de multiples de 6.

c)- En déduire le plus petit commun multiple de 4 et 6

Définition :

Soient a et b deux entiers naturels.

- On dit que b est multiple de a s'il existe un entier naturel k tel que $b = k \times a$.
- Le plus petit commun multiple **non nul** de a et b s'appelle le ppcm de a et b on le note $\text{ppcm}(a, b)$ ou $a \vee b$

Exemple

✓ Le nombre 16 est un multiple de 8 car $16 = 2 \times 8$.

✓ Tout nombre entier naturel a est un multiple de 1 et de lui-même car $a = 1 \times a$

✓ Déterminons $\text{ppcm}(6; 10)$.

On a les multiples non nuls de 6 sont : 6; 12 ;18 ;24 ;30 ;.....

Les multiples non nuls de 10 sont : 10 ;20 ;30 ;40 ;..... ; D'où $\text{ppcm}(6; 10) = 30$

Application 3

1) Déterminer tous les multiples inférieure à 50 de 7.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que le nombre $19 \times 7^{2n} - 7^{2n+1}$ est un multiple de 3

3) Déterminer $\text{ppcm}(12; 18)$ et $\text{ppcm}(15; 45)$

III. Diviseur d'un entier naturel- pgcd de deux entiers naturels

Activité 3.

1) Cocher les cases convenables :

	12	7	10	11	42	8	9	81
Divisible par 2								
Divisible par 3								
Divisible par 5								
Divisible par 7								

2) a)- Déterminer D_{12} l'ensemble de diviseur de 12.

b)- Déterminer D_{42} l'ensemble de diviseur de 42.

c)- En déduire le plus grand diviseur commun de 12 et 42

Définition :

Soient a et b deux entiers naturels.

- On dit que b est diviseur de a s'il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$.
- Le plus grand diviseur commun de a et b s'appelle le pgcd de a et b on le note $\text{pgcd}(a, b)$ ou $a \wedge b$

Exemple

- ✓ 1 est un diviseur de tous les nombres entiers naturels.
- ✓ Les diviseurs de 16 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16
- ✓ Les diviseurs de 24 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24
- ✓ Déterminons $\text{pgcd}(16; 24)$.
On a $D_{16} = \{1; 2; 4; 8; 16\}$ et $D_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$
D'où $\text{pgcd}(16; 24) = 8$.

Application 4

- 1) Déterminer les diviseur de 96 et 111.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que le nombre $2 \times 3^{2n+3} + 9 \times 3^{2n}$ est divisible par 7
- 3) Déterminer $\text{pgcd}(36; 9)$ et $\text{pgcd}(84; 63)$

Exercice 2

Soit n un entier naturel impair, on pose $x = n^2 + 1$ et $y = n^2 - 1$

- 1) Etudier la parité de x et y .
- 2) Simplifier le nombre $(6n+11)(-1)^x - (2n+4)(-1)^y$
- 3) Montrer que 8 divise $n^2 - 1$
- 4) Dédire que $n^4 - 1$ est un multiple de 16..

Propriété

Soit n un entier naturel. On dit que n est divisible par :

- 2 si son chiffre des unités est : 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8
- 5 si son chiffre des unités est : 0 ou 5
- 3 ou 9 si la somme de ses chiffres forme un multiple de 3 ou 9.
- 4 si son chiffre des unités et son chiffre des dizaines forment un multiple de 4.

Exemple

- ✓ 4725 : divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
- ✓ 4725 : divisible par 3 et par 9 car la somme de ses chiffres qui est $4+7+2+5=18$ est un multiple de 3 et de 9.
- ✓ 1628 : divisible par 4 car 28 est un multiple de 4.

Application 5

- 1) Déterminer le chiffre a pour que le nombre $5a74$ est divisible par 3
- 2) Déterminer le chiffre b pour que le nombre $532b$ est divisible à la fois par 2 et 9
- 3) Déterminer le chiffre c pour que le nombre $921c$ est divisible par 3 et non pas par 9
- 4) Déterminer le chiffre d pour que le nombre $d15d$ est divisible par 2, 3, 4 et 9

IV. Les nombres premiers

Activité 4.

Déterminer D_2 ; D_3 ; D_7 ; D_{11} ; D_{13} .Que remarquer-vous ?.

Définition :

Un entier naturel supérieur ou égal à 2 est dite **premier** s'il possède **deux** diviseurs **1 et lui-même**.

Exemple

- ✓ Les nombres 2 ; 3 ; 5 ; 7 et 11 sont des nombres premiers car ils ont exactement deux diviseurs.
- ✓ Le nombre 8 n'est pas premier car il possède 4 diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; 8

Remarque :

- 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur.
- 2 le seul nombre pair qui est premier.
- Pour étudier la primalité d'un nombre entier naturel n ; on cherche tous les nombres premiers p qui vérifient $p \leq \sqrt{n}$. Si n est divisible par l'un de ces nombres alors n n'est pas un nombre premier sinon n est premier.

Exemple

Le nombre 37 est-il premier ?

On a $\sqrt{37} \approx 6,08$ et les nombres premiers inférieur ou égal à $\sqrt{37}$ sont 2, 3 et 5.

Or 37 n'est pas divisible par 2 ; 3 et 5 ; alors 37 est un nombre premier.

Application 6

- 1) Déterminer tous les nombres premiers entre 0 et 100
- 2) Parmi les nombres de la liste ci-dessous déterminer ceux qui sont des nombres premiers : 101 - 239 - 387 - 700107

V. Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

Activité 5

Ecrire les nombres suivants sous forme de produit de nombres premiers : 14 ; 16 ; 25 ; 75

Théorème 1

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple

- ✓ $30 = 2 \times 3 \times 5$ est une décomposition de 30 en produit de facteurs premiers.
- ✓ $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ est une décomposition de 90 en produit de facteurs premiers.

Application 7

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers : 48 ; 612 ; 1530 ; 3240

Théorème 2

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

- ✓ Le $\text{pgcd}(a, b)$ est le **produit** de facteurs premiers **communs** apparaissent à la fois dans la décomposition de a et b et affectés à une **petite** puissance.
- ✓ Le $\text{ppcm}(a, b)$ est le **produit** de facteurs premiers **communs** et **non communs** apparaissent dans la décomposition de a et b et affectés à une **grande** puissance.

Exemple

$$a = 132 \text{ et } b = 120$$

$$\text{On a } 132 = 2^2 \times 3 \times 11 \text{ et } 120 = 2^3 \times 3 \times 5 ;$$

$$\text{par conséquent } \text{pgcd}(132, 120) = 2^2 \times 3 = 12 \text{ et } \text{ppcm}(132, 120) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11 =$$

Théorème 3

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

On dit que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $\text{PGCD}(a, b) = 1$

Exemple

- ✓ On a : $\text{pgcd}(7; 9) = 1$ alors les deux nombres 7 et 9 sont premiers entre eux.
- ✓ On a : $\text{pgcd}(15; 30) = 15$ alors les deux nombres 15 et 30 ne sont pas premiers entre eux

Application 8

On considère les nombres suivants : $a = 1100$ et $b = 3465$

- 1) Décomposer les deux nombres a et b en produit de facteurs premiers.
- 2) Déduire $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$
- 3) Est-ce que a et b sont premiers entre eux ? justifier votre réponse.

Exercice 3

- 1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants : 156 ; 495 ; 2160 ; 4860
- 2) Déduire $\text{pgcd}(2160; 4860)$; $\text{pgcd}(156; 495)$; $\text{ppcm}(2160; 4860)$; $\text{ppcm}(156; 495)$
- 3) Simplifier $\sqrt{2160}$; $\sqrt{4860}$ et $\frac{2160}{4860}$
- 4) Montrer que $\sqrt{2160 \times 4860} \in \mathbb{N}$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = 5^{n+2} - 5^n$ et $b = 7 \times 5^n + 5^{n+1}$

- 1) Montrer que a est un multiple de 3 et que 12 divise b .
- 2) Décomposer, en fonction de n , a et b en produit de facteurs premiers
- 3) Déterminer $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$ en fonction de n