

Exercice 1:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < 6$.
 (b) Montrer que (u_n) est croissante.
 (c) En déduire que (u_n) est convergente.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 6$.

- (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison.
- (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n puis u_n en fonction de n .
- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + u_n} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$.
 (b) Montrer que (u_n) est croissante.
 (c) En déduire que (u_n) est convergente.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.
 (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison.
 (b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .
 (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 3:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > 2$.
2. (a) Etudier la monotonie de (u_n) .
 (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \leq 5$.
 (c) En déduire que (u_n) est convergente.

3. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$.
 (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_1 = 1$.
 (b) Déterminer v_n en fonction de n , puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2 + \frac{3}{n}$.
 (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 4:

1. Soit la fonction f définie sur $[1, 4]$ par $f(x) = \frac{4}{5-x}$.

- (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [1, 4]$.
- (b) En déduire la monotonie de f sur $[1, 4]$.
- (c) Montrer que $f([1, 4]) = [1, 4]$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 4$.
- (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5:

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{2} \end{cases}$$
 - (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \sqrt{2}$
 - (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{2} - u_n)(\sqrt{2} + u_n)}{2u_n}$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
 - (d) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite réelle L .
2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$.
Montrer que $f(L) = L$ et déterminer L .

Exercice 6:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{5 + 2u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$.
(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^n$.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 7:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.
(b) En déduire que la monotonie de (u_n) .
3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.