

4 Nombres complexes

4.1 Des calculs

Exercice 1

Mettre sous la forme $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) les nombres :

$$(a) \ z = \frac{1-2i}{1+3i}$$

$$(d) \ z = (1 + \sqrt{3} + 2i)^2$$

$$(b) \ z = \frac{1+\sqrt{2}-i}{1-\sqrt{2}+i}$$

$$(e) \ \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$$

$$(c) \ z = (1 + 2i)(1 - i)$$

$$(f) \ \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Correction

$$(a) \ z = \frac{1-2i}{1+3i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$(b) \ z = \frac{1+\sqrt{2}-i}{1-\sqrt{2}+i} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2}i$$

$$(c) \ z = (1 + 2i)(1 - i) = 3 + i$$

$$(d) \ z = (1 + \sqrt{3} + 2i)^2 = 2\sqrt{3} + 4(\sqrt{3} + 1)i$$

$$(e) \ \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i$$

$$(f) \ \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = -3.$$

Exercice 2

Calculer suivant l'entier naturel non nul n :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} i^k$$

Correction

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} i^k = \frac{1 - i^n}{1 - i}$$

Et donc :

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 4k \\ 1 & \text{si } n = 4k + 1 \\ \frac{2}{1-i} = 1+i & \text{si } n = 4k + 2 \\ \frac{1+i}{1-i} = i & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(a) $(1 + 2i)z - 1 + 3i = 0$

(b) $i\bar{z} + (1 - i)z + 1 + 2i = 0$

(c) $|z| + z - 3 - 4i = 0$

Correction

(a) $(1 + 2i)z - 1 + 3i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1-3i}{1+2i} = -1 - i.$

(b) On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} i\bar{z} + (1-i)z + 1 + 2i &= 0 \Leftrightarrow i(x - iy) + (1-i)(x + iy) + 1 + 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2y + 1) + (y + 2)i = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } y = -2 \\ &\Leftrightarrow z = 3 - 2i \end{aligned}$$

Une autre méthode :

On a :

$$i\bar{z} + (1-i)z + 1 + 2i = 0$$

et par conjugaison on a aussi :

$$-iz + (1+i)\bar{z} + 1 - 2i = 0$$

On a donc le système d'inconnues z et $\bar{z}$:

$$\begin{cases} (1-i)z + i\bar{z} = -1 - 2i \\ -iz + (1+i)\bar{z} = -1 + 2i \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1-i & i \\ -i & 1+i \end{vmatrix} = 1 \text{ et } D_z = \begin{vmatrix} -1-2i & i \\ -1+2i & 1+i \end{vmatrix} = 3-2i \text{ et donc } z = \frac{D_z}{D} = 3-2i$$

(c) On pose la encore $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |z| + z - 3 - 4i &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x + iy - 3 - 4i = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2} + x - 3) + (y - 4)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x - 3 = 0 \text{ et } y - 4 = 0 \end{aligned}$$

On trouve alors $x = -\frac{7}{6}$ et $y = 4$, soit $z = -\frac{7}{6} + 4i$.

4.2 Forme trigonométrique

Exercice 4

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

(a) $z = -1 + i$

(b) $z = (-1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i)$

(c) $z = \frac{(1-i)^2(1+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{3}+i)(-1+i)^2}$

(d) $z = 1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)i \quad (\theta \in]0, \pi[)$

(e) $z = 1 + \sin(\theta) + \cos(\theta)i \quad (\theta \in]0, \pi[)$

Correction

(a) $z = -1 + i$, $|-1 + i| = \sqrt{2}$ et donc

$$z = -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

(b) $z = (-1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i)$,

$$|z| = |-1 + \sqrt{3}i| |\sqrt{3} + i| = 4. \quad z = 4 \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

et

$$\arg \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \quad [2\pi]$$

donc

$$z = 4 \left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) \right)$$

$$(d) \quad z = \frac{(1-i)^2(1+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{3}+i)(-1+i)^2}, \quad |z| = \left| \frac{(1-i)^2(1+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{3}+i)(-1+i)^2} \right| = 1.$$

$$\begin{aligned} \arg(z) &= 2\arg(1-i) + \arg(1+\sqrt{3}i) - \arg(\sqrt{3}+i) - 2\arg(-1+i) \quad [2\pi] \\ &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi - \frac{3}{2}\pi \quad [2\pi] \\ &= -\frac{11\pi}{6} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Donc :

$$z = \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$(e) \quad z = 1 + \cos\theta + \sin\theta i \quad (\theta \in]0, \pi[), \text{ par les transformations : } 1 + \cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \sin(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{et donc : } z = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + i2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)(\cos\frac{1}{2}\theta + i\sin\frac{1}{2}\theta), \text{ comme } \theta \in]0, \pi[, \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) > 0$$

Donc :

$$z = 2\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)\left(\cos\frac{1}{2}\theta + i\sin\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$(f) \quad z = 1 + \sin\theta + \cos\theta i \quad (\theta \in]0, \pi[)$$

$$\begin{aligned} 1 + \sin(\theta) + \cos(\theta)i &= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)i \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Il reste à déterminer le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

$$\theta \in]0, \pi[\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$$

Par un encadrement simple on trouve $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) > 0$ pour $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et dans ce cas la forme trigonométrique est :

$$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

pour $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) < 0$, et dans ce cas la forme trigonométrique est :

$$z = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right)$$

Exercice 5

On pose :

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$$

1. Écrire sous forme algébrique et trigonométrique le nombre complexe z .
2. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction

On pose :

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$$

$$1. z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(1 - i)}{2} : \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\sqrt{3} + \frac{1}{2}i = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i.$$

$$|z| = \left| \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} \right| = \sqrt{2}, \quad \arg(z) = \arg(1 + \sqrt{3}i) - \arg(1 + i) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \quad [2\pi]. \text{ Et donc : } z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right).$$

2. En partant de :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i\right) = \operatorname{Re}\left(\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right) \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i\right) = \operatorname{Im}\left(\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right) \end{cases}$$

On trouve : .

$$\begin{cases} \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right). \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Exercice 6

On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$$

1. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe z_1 .
2. Vérifier que : $z_1 z_2 = \sqrt{2} \bar{z}_2$.
3. En déduire un argument du nombre complexe z_2 .

Correction

$$z_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$$

1. C'est classique $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$

2.

$$z_1 z_2 = (1 - i)(1 + \sqrt{2} + i) = \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}i = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2} - i) = \sqrt{2} \bar{z}_2.$$

3.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(\sqrt{2} \bar{z}_2) = -\arg(z_2) [2\pi]$$

Donc :

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = -\arg(z_2) [2\pi]$$

Soit :

$$\arg(z_2) = -\frac{1}{2} \arg(z_1) = -\frac{\pi}{8} [2\pi]$$

.

4.3 Ensembles de points

Exercice 7

Soit a un nombre réel non nul et $z \in \mathbb{C}$, montrer que :

1. $|z - a| = |z + a| \iff z \in i\mathbb{R}$
2. $|z - ai| = |z + ai| \iff z \in \mathbb{R}$

Correction

1.

$$\begin{aligned}
 |z - a| &= |z + a| \iff |z - a|^2 = |z + a|^2 \\
 &\iff (z - a)(\overline{z - a}) = (z + a)(\overline{z + a}) \\
 &\iff (z - a)(\overline{z} - a) = (z + a)(\overline{z} + a) \\
 &\iff 2a(z + \overline{z}) = 0 \\
 &\iff z \in i\mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 |z - ai| &= |z + ai| \iff |z - ai|^2 = |z + ai|^2 \\
 &\iff (z - ai)(\overline{z - ai}) = (z + ai)(\overline{z + ai}) \\
 &\iff (z - ai)(\overline{z} + ai) = (z + ai)(\overline{z} - ai) \\
 &\iff 2ai(z - \overline{z}) = 0 \\
 &\iff z \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Exercice 8

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans les cas suivants :

(a) $|z - 1 + i| = |z - 1 + 2i|$

(c) $|z - 1 + i| = |\bar{z} - 1 + i|$

(d) $|z - 1 + i| = 5$

Correction

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé , M le point d'affixe z .

(a)

$$|z - (1 - i)| = |z - (1 + 2i)| \Leftrightarrow |z - (1 - i)| = |z - (1 - 2i)|$$

On considère alors les points $A(1 - i)$ et $B(1 - 2i)$ l'égalité précédente est équivalente à :

$$AM = BM$$

L'ensemble des points cherché est la médiatrice du segment $[AB]$.

(c)

$$|z - 1 + i| = |\bar{z} - 1 + i| \Leftrightarrow |z - 1 + i| = \left| \overline{z - 1 + i} \right|$$

$$\Leftrightarrow |z - 1 + i| = |z - 1 - i|$$

$$\Leftrightarrow |z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|$$

$$\Leftrightarrow CM = DM$$

avec $C(1 - i)$ et $D(1 + i)$, il s'agit donc de la médiatrice du segment $[CD]$

(d)

$$|z - 1 + i| = 5 \Leftrightarrow |z - (1 - i)| = 5$$

$$\Leftrightarrow OM = 5$$

avec $\Omega(1-i)$, il s'agit donc du cercle de centre Ω et de rayon 5.

4.4 Équations

Exercice 9

Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Correction

Soit $\alpha + i\beta$ une racine carrée du nombre complexe $Z = \sqrt{3} + i$, et donc : $Z = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2$. On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} [1] & \alpha^2 + \beta^2 = 2 & |(\alpha + i\beta)^2| = |Z| \\ [2] & \alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{3} & \operatorname{Re}(\alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2) = \operatorname{Re}(Z) \\ [3] & 2\alpha\beta = 1 & \operatorname{Im}(\alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2) = \operatorname{Im}(Z) \end{cases}$$

$$\frac{[1] + [2]}{2} \text{ donne } \alpha^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{[1] - [2]}{2} \text{ donne } \beta^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

L'équation [3] nous dit tout simplement que α et β ont même signe, ce qui donne :

$$\alpha + i\beta = \pm \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} i \right).$$

On a : $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ donc $|\alpha + i\beta| = \sqrt{2}$ et $\arg(\alpha + i\beta) = \frac{\pi}{12} [\pi]$ cela revient à dire que : $\arg(\alpha + i\beta) = \frac{\pi}{12} [2\pi]$ ou $\arg(\alpha + i\beta) = \frac{\pi}{12} + \pi [2\pi]$. Comme $\cos(\frac{\pi}{12}) > 0$ alors :

$$\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} i$$

et par égalité des parties réelles, on aura :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}.$$

Exercice 10

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) ; z^3 + (1+i)z + (i-1)z - i = 0$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai à l'équation (E).
2. Trouver les complexes a et b tels que :

$$z^3 + (1+i)z + (i-1)z - i = (z - ai)(z^2 + az + b)$$

3. Résoudre alors l'équation (E).
4. Sur le même modèle, résoudre l'équation :

$$4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$$

, sachant qu'elle admet une racine réelle.

Correction

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) , z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$$

1. Si ai une solution de (E), alors :

$$(ai)^3 + (1+i)(ai)^2 + (i-1)ai - i = 0$$

$$\Leftrightarrow -a^3i - (1+i)a^2 + (i-1)ai - i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-a^2 - a) + (-a^3 - a^2 - 1)i = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 - a \\ -a^3 - a^2 - a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & a = -1 \text{ ou } a = 0 \\ (2) & -a^3 - a^2 - a - 1 = 0 \end{cases}$$

La solution qui vérifie (2) est $a = -1$, on vérifie alors que $-i$ est la solution imaginaire pur de (E).

Méthode 1 : En effectuant la division euclidienne de

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i$$

par $z+i$, on trouve :

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2 + z - 1)$$

Méthode 2 : On écrit

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2 + az + b)$$

On prend $z = 0$, on aura :

$$-i = ib \text{ et donc, } b = -1.$$

On prend $z = i$, on aura :

$$-2 - 4i = 2i(-2 + ai), \text{ soit } a = 1.$$

Méthode 3 : On écrit

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i &= (z+i)(z^2 + az + b) \\ &= z^3 + (a+i)z^2 + (ai+b)z + ib\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on aura :

$$\begin{cases} a+i = 1+i \\ ai+b = i-1 \\ ib = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

2.

$$\begin{aligned}z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i &= 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2 + z - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -i \quad \text{ou} \quad z^2 + z - 1 = 0\end{aligned}$$

Réolvons l'équation $z^2 + z - 1 = 0$. Son discriminant $\Delta = 5$ et les solutions sont $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Donc l'ensemble des solutions est : $\left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -i \right\}$.

3. Pour l'équation :

$$(F) : 4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$$

On cherche une solution $z_0 = \delta \in \mathbb{R}$, on procède comme en 1., on trouve $\delta = \frac{3}{2}$.

Puis on écrit :

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}, \quad 4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) \\ &= \left(z - \frac{3}{2}\right)(az^2 + bz + c)\end{aligned}$$

En utilisant l'une des trois méthodes citées ci-dessus on trouve :

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}, 4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) \\ = \left(z - \frac{3}{2}\right)(4iz^2 + (2+12i)z - 2+14i)\end{aligned}$$

On cherche dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation

$$4iz^2 + (2+12i)z - 2+14i = 0$$

,son discriminant est

$$\Delta = (2+12i)^2 - 16i(-2+14i) = 84 + 80i = (10+4i)^2$$

et donc les solutions sont :

$$z = \frac{-2-12i-10-4i}{4i} = -4+3i$$

ou

$$z = \frac{-2-12i+10+4i}{4i} = -2-2i.$$

Donc l'ensemble des solutions de (F) est : $\{\frac{3}{2}, -4+3i, -2-2i\}$.

Exercice 11

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) ; z^2 + (1+m)(1+i)z + i(1+m^2) = 0$$

1.(a) Vérifier que $a = -(i+m)$ est une solution de (E).

(b) En déduire b l'autre solution de (E).

2. On suppose que $|m| = 1$.

(a) Vérifier que : $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$.

(b) Vérifier que : $a^2 = m(m + \bar{m} + 2i)$

(c) En déduire que : $\arg(a) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arg(m) \quad [\pi]$

Correction

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) \quad z^2 + (1+m)(1+i)z + i(1+m^2) = 0$$

1.(a) Vérifions que $a = -(i+m)$ est une solution de (E).

$$\begin{aligned} &(-(i+m))^2 + (1+m)(1+i)(-(i+m)) + i(1+m^2) = (i+m)[i+m - (1+i)] \\ &= (i+m)[i+m - m - im - 1 - i + im + 1] = 0 \end{aligned}$$

(b) Si b est l'autre solution, alors $ab = i(1+m^2)$, donc :

$$b = \frac{i(1+m^2)}{a} = \frac{i(1+m^2)}{-(i+m)} = -im - 1..$$

2. On suppose que $|m| = 1$.

(a) Vérifions que : $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{-(i+m)}{-im-1} = \frac{(i+m)}{im+1}$$

Alors :

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{-i + \bar{m}}{-i\bar{m} + 1} = \frac{-i + \frac{1}{m}}{\frac{-i}{m} + 1} \quad \left(\text{Car puisque } m\bar{m} = 1 \text{ alors } \bar{m} = \frac{1}{m} \right).$$

Donc :

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{-im + 1}{-i + m} = \frac{-i(m+i)}{-i(1+im)} = \frac{a}{b}$$

Donc $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$.

(b) Vérifions que : $a^2 = m(m + \bar{m} + 2i)$.

$$\begin{aligned} a^2 &= (-(i + m))^2 = m^2 + 2im - 1 \\ &= m^2 + 2im - m\bar{m} \quad (m\bar{m} = 1) \\ &= m(m - \bar{m} + 2i) \end{aligned}$$

(c) On a :

$$m - \bar{m} = 2i\operatorname{Im}(m)$$

et donc

$$(m - \bar{m} + 2i) = 2i(\operatorname{Im}(m) + 1)$$

, comme $|m| = 1$ alors :

$$-1 \leq \operatorname{Im}(m) \leq 1$$

et donc :

$$0 \leq \operatorname{Im}(m) + 1.$$

Si $\operatorname{Im}(m) + 1 = 0$ alors $m = -1$ par suite $a^2 = 0$ ce qui est absurde ,
donc $\operatorname{Im}(m) + 1 > 0$, ce qui permet de dire que

$$\arg(2i(\operatorname{Im}(m) + 1)) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

et comme :

$$a^2 = m2i(\operatorname{Im}(m) + 1)$$

on en déduit que :

$$2\arg(a) = \arg(m) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Soit :

$$\arg(a) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arg(m) \quad [\pi]$$

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^{2n} + z^n + 1 = 0$.

2. $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i \tan(\alpha)}{1-i \tan(\alpha)} \quad , \quad \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère dans $\mathbb{C}$:

$$z^{2n} + z^n + 1 = 0$$

On pose $Z = z^n$, et l'équation devient :

$$Z^2 + Z + 1 = 0$$

Sont discriminant $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$ et les solutions sont $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\bar{\omega}$.

Il faut donc résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations :

$$z^n = \omega \quad \text{et} \quad z^n = \bar{\omega}.$$

Pour $z^n = \omega$:

$$z^n = \omega \Leftrightarrow z^n = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3n}}\right)^n$$

Et donc les solutions de cet équation sont :

$$z_k = e^{i\frac{2\pi}{3n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{\frac{2\pi i(1+3k)}{3n}} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Pour $z^n = \bar{\omega}$:

$$z^n = \bar{\omega} \Leftrightarrow (\bar{z})^n = \omega$$

et de ce qui précède on aura :

$$\bar{z}_k = e^{\frac{2\pi i(1+3k)}{3n}} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Soit :

$$z_k = e^{\frac{-2\pi i(1+3k)}{3n}} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

En conclusion l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$z^{2n} + z^n + 1 = 0$$

est :

$$\left\{ e^{\frac{2\pi i(1+3k)}{3n}}, e^{\frac{-2\pi i(1+3k)}{3n}} ; k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

2. Pour l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}$, $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, avant tout , on a :

$$\frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)} = \frac{\frac{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{i2\alpha}.$$

On pose $Z = \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n$, et l'équation de vient :

$$Z^n = e^{i2\alpha} = \left(e^{\frac{i2\alpha}{n}}\right)^n.$$

et donc on peut écrire que :

$$\frac{1+iz_k}{1-iz_k} = e^{\frac{i2\alpha}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}} = e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{n}} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Donc après tout calcul fait :

$$\begin{aligned}
 z_k &= \frac{e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{n}} - 1}{i\left(e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{n}} + 1\right)} = \frac{2i \sin\left(\frac{(\alpha+k\pi)}{n}\right) e^{\frac{i(\alpha+k\pi)}{n}}}{2i \cos\left(\frac{(\alpha+k\pi)}{n}\right) e^{\frac{i(\alpha+k\pi)}{n}}} \\
 &= \cot\left(\frac{(\alpha+k\pi)}{n}\right) \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}
 \end{aligned}$$

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : (z+i)^n = (z-i)^n$$

1. Montrer que si z solution de (E) alors $z \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre (E) .

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : (z+i)^n = (z-i)^n$$

1. Soit z solution de (E) alors :

$$\begin{aligned}
 (z+i)^n &= (z-i)^n \Rightarrow |z+i|^n = |z-i|^n \\
 &\Rightarrow |z+i| = |z-i| \\
 &\Rightarrow |z+i|^2 = |z-i|^2 \\
 &\Rightarrow (z+i)(\overline{z+i}) = (z-i)(\overline{z-i}) \\
 &\Rightarrow (z+i)(\overline{z}-i) = (z-i)(\overline{z}+i) \\
 &\Rightarrow z - \overline{z} = 0 \\
 &\Rightarrow z \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

2. Remarquons que i n'est pas une solution, donc $z - i \neq 0$.

$$(z + i)^n = (z - i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z + i}{z - i} \right)^n = 1$$

On en déduit que :

$$\frac{z_k + i}{z_k - i} = e^{\frac{i2k\pi}{n}} ; k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

et donc :

$$z_k = \frac{-i \left(e^{\frac{i2k\pi}{n}} + 1 \right)}{\left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}} \right)} = \frac{-2i \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}} = \cot g\left(\frac{k\pi}{n}\right) ; k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

4.5 Forme exponentielle

Exercice 14

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. on pose :

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta) , S = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta) \text{ et } E = \sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta}$$

1. Vérifier que :

$$C + iS = E$$

2. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{ix} - 1 = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}$$

3. En déduire que :

$$C = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ et } S = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Correction

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. on pose :

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta) \quad , \quad S = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta) \quad \text{et} \quad E = \sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta}$$

1.

$$\begin{aligned} C + iS &= \left(\sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta) \right) + i \left(\sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta} = E \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad , \quad 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\left(\frac{x}{2}\right)} &= \left(e^{i\left(\frac{x}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x}{2}\right)} \right) e^{i\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= e^{ix} - 1 \end{aligned}$$

3. Remarquons que : $C = \operatorname{Re}(E)$ et $S = \operatorname{Im}(E)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^{k=n} (e^{i\theta})^k \quad \text{par Moivre} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \quad \text{par la question 2.} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\left(\frac{n\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

En passant à la partie réelle et imaginaire on trouve :

$$C = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Exercice 15

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. on pose :

$$P(z) = (z + 1)^n - e^{i2n\theta}$$

et $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

1. Vérifier que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \zeta_0 \zeta_1 \dots \zeta_{n-1} = (-1)^{n+1} 2i \sin(n\theta) e^{in\theta}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$.

3. Montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} = i^{(n-1)} e^{in\theta}$$

4. On pose :

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$$

(a) Démontrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \zeta_0 \zeta_1 \dots \zeta_{n-1} = -2^n i A_n e^{in\theta}.$$

(b) En déduire une expression simple de A_n en fonction de n et θ .

Correction

Relations entre racines et coefficients d'un polynome.

Si Q un polynome à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré n ,

$$Q(z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots a_1 Z + a_0$$

et $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines de Q dans $\mathbb{C}$, alors on a les relations suivantes :

$$[1] : Q(Z) = a_n \prod_{k=1}^{k=n} (Z - z_k) = a_n (Z - z_1)(Z - z_2) \dots (Z - z_n)$$

$$[2] : \sum_{k=1}^{k=n} z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

$$[3] : \prod_{k=1}^{k=n} z_k = z_1 \times z_2 \times \dots \times z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \frac{Q(0)}{a_n}.$$

Dans le cas particulier ou :

$$Q(z) = az^2 + bz + c.$$

z_1 et z_2 les deux racines, on retrouve les relations classiques :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Revenons à notre exercice.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. on pose :

$$P(z) = (z + 1)^n - e^{i2n\theta}$$

P est un polynome de degré n avec $a_n = 1$ et $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ les racines dans $\mathbb{C}$ de ce polynome ..

1. En utilisant [3] , on aura :

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k &= \zeta_0 \zeta_1 \dots \zeta_{n-1} = (-1)^n \frac{Q(0)}{a_n} \\
 &= (-1)^n (1 - e^{i2n\theta}) \\
 &= -2i \sin(n\theta) e^{in\theta} (-1)^n \\
 &= (-1)^{n+1} 2i \sin(n\theta) e^{in\theta}.
 \end{aligned}$$

2.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^n = e^{i2n\theta} = (e^{i2\theta})^n$$

Les solutions z_k sont telles que :

$$\zeta_k + 1 = e^{i2\theta} \cdot e^{\frac{i2k\pi}{n}} = e^{2i(\theta + \frac{k\pi}{n})}, \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Et donc :

$$\zeta_k = e^{2i(\theta + \frac{k\pi}{n})} - 1 = 2i \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(\theta + \frac{k\pi}{n})}, \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

3.

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^{n-1} e^{i(\theta + \frac{k\pi}{n})} &= e^{\sum_{k=0}^{n-1} i(\theta + \frac{k\pi}{n})} \\
 &= e^{in\theta} e^{\frac{i\pi}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right)} \\
 &= e^{in\theta} e^{\frac{i\pi}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)} \\
 &= e^{in\theta} \left(e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{n-1} \\
 &= i^{(n-1)} e^{in\theta}
 \end{aligned}$$

A retenir :

$$e^{i2k\pi} = 1, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

4. On a :

(a)

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k &= \prod_{k=0}^{n-1} 2i \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} \\
 &= (2i)^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) \right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} \right) \\
 &= (2i)^n A_n i^{(n-1)} e^{in\theta} \quad \text{d'après 3.} \\
 &= -2^n i A_n e^{in\theta}.
 \end{aligned}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \zeta_0 \zeta_1 \dots \zeta_{n-1} = -2^n i A_n e^{in\theta}.$$

(b) D'après 1. on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k = (-1)^{n+1} 2i \sin(n\theta) e^{in\theta}.$$

Donc

$$-2^n i A_n e^{in\theta} = (-1)^{n+1} 2i \sin(n\theta) e^{in\theta}.$$

Donc :

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1} 2i \sin(n\theta) e^{in\theta}}{-2^n i e^{in\theta}} = \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{2^{n-1}}.$$

Exercice 16

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.

1. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \zeta_0 + \zeta_1 + \dots + \zeta_{n-1} = 0$$

2. On prend $n = 7$ et on pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On considère les nombres complexes $U = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $V = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

(a) Calculer $U + V$ et UV .

(b) En déduire les valeurs de U et V .

Correction

1. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ sont les nombres complexes : $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Posons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, donc ces solutions sont :

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}.$$

Et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$$

(Car $\omega^n = 1$, puisque ω solution de $z^n = 1$)

2. On prend $n = 7$ et on pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $U = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $V = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

(a)

$$\begin{aligned}
 U + V &= \omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^6 \\
 &= (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) - 1 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 UV &= (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) \\
 &= \omega^{10} + \omega^9 + \omega^8 + 3\omega^7 + \omega^6 + \omega^5 + \omega^4
 \end{aligned}$$

Mais avec $\omega^7 = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 UV &= \omega^3 + \omega^2 + \omega + 3 + \omega^6 + \omega^5 + \omega^4 \\
 &= (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) + 2 \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

(b) Comme on a : $\begin{cases} U + V = -1 \\ UV = 2 \end{cases}$ U et V sont solutions de l'équation : $T^2 + T + 2 = 0$, qui sont $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{7}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{7}$. Il faut donc distinguer le quel de ces nombres est U et lequel est V .

On a : $\omega^7 = 1$ et $\omega\bar{\omega} = 1$, on en déduit que $\omega^4 = \bar{\omega}^3$, et $\text{Im}(U) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{6\pi}{7}) = \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{1\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} > 0$ et donc $U = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{7}$ par suite $V = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{7}$

Exercice 17

Calculer $(1 + 2i)(1 + 3i)$, en déduire que :

$$\arctan(2) + \arctan(3) = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$$

Correction

On rappelle que si , $z = a + ib$ avec $a \neq 0$, et $\theta = \arg(z) \in [2\pi]$ alors : $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.
Ce qui donne :

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in [2\pi].$$

Dans notre exercice on a :

$$\begin{aligned}(1 + 2i)(1 + 3i) &= -5 + 5i \\ &= 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.\end{aligned}$$

et donc :

$$\arg((1 + 2i)(1 + 3i)) = \arg(1 + 2i) + \arg(1 + 3i) = \frac{3\pi}{4} \in [2\pi].$$

Par suite :

$$\arctan(2) + \arctan(3) = \frac{3\pi}{4} \in [2\pi].$$

4.6 Transformations et géométrie**Exercice 18**

Trouver tous les nombres complexes z tels que :

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$$

Correction

Ecrivons $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$)

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow r^2 = 1 \quad \text{et donc} \quad r = 1.$$

D'autre part :

$$1 - z = 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Puisque $|z| = |1 - z|$, alors :

$$\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \frac{1}{2} \quad \text{par suite} \quad \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On trouve alors ,

$$z = \pm e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad z = \pm e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 19

On pose pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i\}$:

$$f(z) = \frac{iz}{z - i}.$$

1.(a) Montrer que : $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

(b) Déterminer l'ensemble des points : $E_1 = \{M(z) ; f(z) \in \mathbb{R}\}$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 1 - 2z$.

3. On pose : $z - i = re^{i\alpha}$.

(a) Ecrire sous forme trionométrique le complexe : $f(z) - i$.

(b) Déterminer les ensembles suivants :

$$E_2 = \{M(z) ; |f(z) - i| = \sqrt{2}\}$$

$$E_3 = \left\{ M(z) ; \arg(f(z) - i) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \right\}$$

Correction

On pose pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i\}$:

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}.$$

1.(a) :

$$\begin{aligned} f(z) \in i\mathbb{R} &\iff \overline{f(z)} = -f(z) \\ &\iff \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i} = \frac{-iz}{z-i} \\ &\iff i\bar{z}(z-i) = iz(\bar{z}+i) \\ &\iff \bar{z} = -z \\ &\iff z \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) $E_1 = \{M(z) ; f(z) \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff \overline{f(z)} = f(z) \\ &\iff \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i} = \frac{iz}{z-i} \\ &\iff -i\bar{z}(z-i) = iz(\bar{z}+i) \\ &\iff 2iz\bar{z} + z - \bar{z} = 0 \\ &\iff |z|^2 + \operatorname{Im}(z) = 0. \end{aligned}$$

En écrivant $z = x + iy$, alors :

$$\begin{aligned} M(z) \in E_1 &\iff x^2 + y^2 + y = 0 \\ &\iff x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2}i)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

2.

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - 2z \Leftrightarrow \frac{iz}{z-i} = 1 - 2z \text{ et } z \neq i. \\ &\Leftrightarrow 2z^2 - (1+i)z + i = 0 \text{ et } z \neq i. \end{aligned}$$

,

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1+i)z + i = 0$, son discriminant $\Delta = 2i - 8i = -6i = [\sqrt{3}(1-i)]^2$.

Les solutions seront alors $z = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{(1-\sqrt{3})}{4}i$ ou $z = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{(1+\sqrt{3})}{4}i$.

3. On pose : $z - i = re^{i\alpha}$ ($r > 0$).

(a)

$$\begin{aligned} f(z) - i &= \frac{iz}{z-i} - i \\ &= \frac{-1}{z-i} = -\frac{1}{r}e^{-i\alpha} = \frac{1}{r}e^{i(\pi-\alpha)} \\ &= \frac{1}{r}(\cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha)). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} M(z) \in E_2 &= \{M(z) ; |f(z) - i| = \sqrt{2}\} \Leftrightarrow \left| \frac{-1}{z-i} \right| = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow |z-i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

E_2 est le cercle de centre $J(i)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} M(z) \in E_3 &= \left\{ M(z) ; \arg(f(z) - i) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \right\} \Leftrightarrow \pi - \alpha \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \alpha = \arg(z - i) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{aligned}$$

Il s'agit de la demi droite ouverte d'origine $J(i)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1+i)$.

Exercice 20

On considère l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \frac{1}{6} \left((1 - i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.
2. On pose $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = f(z_n)$ et $u_n = |z_n|$.

(a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n.$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit M_k l'image du complexe z_k , et on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n OM_k$.

(a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n \leq 3.$$

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

4. On pose $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$.

(a) Montrer que :

$$f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

(b) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ sont alignés.

Correction

On considère l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \frac{1}{6} \left((1 - i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right)$$

1.

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \left((1 - i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right) = 0$$

Posons $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left((1 - i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right) &= 0 \Leftrightarrow \left((1 - i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy) \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (3x + \sqrt{3}y) - (\sqrt{3}x + y)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x + y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = -y \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$ est l'ensemble :
 $\{z \in \mathbb{C} ; z = t(1 - i), t \in \mathbb{R}\}$.

2. On pose $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = f(z_n)$ et $u_n = |z_n|$.

(a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = f(z_n) = \frac{1}{6} \left((1 - i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n \right)$, donc
 $z_{n+1} = \frac{1}{6} \left((1 - i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n \right)$.

$$0 \leq u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1}{6} \left((1 - i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n \right) \right| \leq \frac{1}{6} \left(|1 - i\sqrt{3}| |z_n| + 2|\bar{z}_n| \right) = \frac{1}{6} (2|z_n| + 2|\bar{z}_n|) = \frac{1}{3} (|z_n| + |\bar{z}_n|).$$

Comme $|z_n| + |\bar{z}_n|$ on en déduit que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n.$$

(b) Montrons par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Pour $n = 0$, $u_0 = |z_0| = 1 \leq \left(\frac{2}{3} \right)^0$, la propriété est vraie.

Supposons que $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$, et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$.

D'après ce qui précède, on a : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n$ et par hypothèse de récurrence
 $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$.

En conclusion :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Comme $|u_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$), alors suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et sa limite est 0.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit M_k l'image du complexe z_k , et on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} OM_k$.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $OM_k = |z_k| = u_k$, et donc $0 \leq S_n = \sum_{k=0}^{k=n} OM_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_k \leq \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \leq 3$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = OM_{n+1} = u_{n+1} \geq 0$, donc la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ croissante , et comme elle est majorée par 3 donc elle converge .

4. On pose $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$.

(a) :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{6} \left((1 - i\sqrt{3}) re^{i\theta} + 2re^{-i\theta} \right) \\ &= \frac{r}{6} \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} \right) \\ &= \frac{r}{3} \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{3})} + e^{-i\theta} \right) \\ &= \frac{2}{3} r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) e^{-i\frac{\pi}{6}}. \quad \left(\text{On a utilisé : } e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \right) \end{aligned}$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $z_k = u_k e^{i\theta_k}$, d'après la question 4.a. :

$$z_{k+1} = \frac{2}{3} u_k \cos \left(\theta_k + \frac{\pi}{6} \right) e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Par suite Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{z_{k+2} - z_k}{z_{k+1} - z_k} &= \frac{\frac{2}{3} u_{k+1} \cos \left(\theta_{k+1} + \frac{\pi}{6} \right) e^{-i\frac{\pi}{6}} - \frac{2}{3} u_{k-1} \cos \left(\theta_{k-1} + \frac{\pi}{6} \right) e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\frac{2}{3} u_k \cos \left(\theta_k + \frac{\pi}{6} \right) e^{-i\frac{\pi}{6}} - \frac{2}{3} u_{k-1} \cos \left(\theta_{k-1} + \frac{\pi}{6} \right) e^{-i\frac{\pi}{6}}} \\ &= \frac{u_{k+1} \cos \left(\theta_{k+1} + \frac{\pi}{6} \right) - u_{k-1} \cos \left(\theta_{k-1} + \frac{\pi}{6} \right)}{u_k \cos \left(\theta_k + \frac{\pi}{6} \right) - u_{k-1} \cos \left(\theta_{k-1} + \frac{\pi}{6} \right)} = t_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par suite pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$z_{k+2} - z_k = t_k (z_{k+1} - z_k)$$

Ce qui veut dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\overrightarrow{M_k M_{k+2}} = t_k \overrightarrow{M_k M_{k+1}}$$

Les points M_1 , M_2 , ..., M_n sont alignés .

Exercice 21

On considère l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = z^2 - (2 + 6i)z$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 4 - 6i$.
2. On pose $u = 1 + 5i$, $v = 1 + i$, $w = 239 - i$, $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

(a) Vérifier que :

$$u^4 v = 4w.$$

(b) Déterminer en fonctions de α et β des arguments de u et w .

(c) En déduire l'égalité dite de Machin :

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Correction

mais puisque $4\alpha - \beta \in [0, 2\pi]$ alors :

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 22

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle (C) de centre O passant par A .

Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre α .

1.(a) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$.

(b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\bar{\alpha}$ appartiennent au cercle (C) .

2. Soit D un point du cercle $\mathbb{C}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Construire le point E image du point D par la rotation de cercle O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

(b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3. Soient F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

(a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

(b) On admet que le point G a pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1)a).

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

Correction

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle (C) de centre O passant par A .

Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre α .

1.(a)

$$\alpha^2 - 4\alpha = (1 + i\sqrt{3})^2 - 4(1 + i\sqrt{3}) = -6 - 2i\sqrt{3}$$

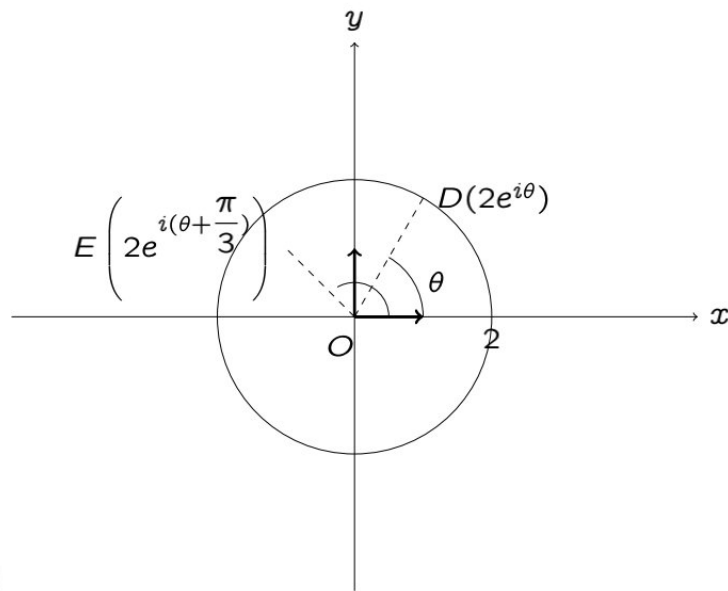
$$2\bar{\alpha} - 8 = 2(1 - i\sqrt{3}) - 8 = -6 - 2i\sqrt{3}$$

Donc :

$$\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$$

(b) Comme le cercle (C) de centre O et passe par A, son rayon est donc $OA = 2$. $|\alpha| = |\bar{\alpha}| = 2$, donc $OB = OC = 2$, et donc les deux points B et C sont sur le cercle (C).

2. Soit D un point du cercle (C) d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



(a)

(b) L'équation complexe de la rotation R de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ est donnée par :

$$R(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$$

On considère l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = z^2 - (2 + 6i)z$$

1.

$$f(z) = 4 - 6i \Leftrightarrow z^2 - (2 + 6i)z - 4 + 6i = 0$$

de discriminant $\Delta = (2 + 6i)^2 - 4(-4 + 6i) = -16$.

les solutions sont : $z = 1 + i$ ou $z = 1 + 4i$

2. On pose $u = 1 + 5i$, $v = 1 + i$, $w = 239 - i$, $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

(a) $u^4 v = (1 + 5i)^4 (1 + i) = 956 - 4i = 4w$.

$$u^4 v = 4w.$$

(b) De l'égalité ci-dessus :

$$4 \arg(u) + \arg(v) = \arg(w) [2\pi].$$

Pour un complexe $z = 1 + ai$, $\arg(z) = \arctan(a) [2\pi]$ ($a \in \mathbb{R}$).

$$\arg(w) = \arg\left(239\left(1 - \frac{1}{239}i\right)\right) = -\arctan\left(\frac{1}{239}\right) = -\beta \quad \text{et} \quad \arg(u) = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

(c) De l'égalité 2.a. ci-dessus :

$$4 \arg(u) + \arg(v) = \arg(w) [2\pi].$$

avec $\arg(v) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$. On aura alors :

$$4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} = -\beta [2\pi]$$

Soit :

$$4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

et donc :

$$R(D) = E \Leftrightarrow z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D = \alpha e^{i\theta}.$$

3. F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

(a)

$$\begin{aligned} z_F &= \frac{z_D + z_B}{2} = \frac{2e^{i\theta} + \alpha}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}. \end{aligned}$$

(b) $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}.$

$$\begin{aligned} \frac{z_G - 2}{z_F - 2} &= \frac{\frac{\alpha 2e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2} - 2}{\frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2} \\ &= \frac{2\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha} - 4}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4} \\ &= \frac{2\alpha^2 e^{i\theta} + 4 - 4\alpha}{\alpha^2 + 2\alpha e^{i\theta} - 4\alpha} \quad \text{on a : } \left(\times \frac{\alpha}{\alpha} \right) \text{ avec } \alpha \bar{\alpha} = 4. \\ &= \frac{(2\alpha^2 e^{i\theta} + 4 - 4\alpha)}{2\bar{\alpha} - 8 + 2\alpha e^{i\theta}} \quad \text{d'après la question 1.} \\ &= \frac{\alpha (2\alpha^2 e^{i\theta} + 4 - 4\alpha)}{2 (2\alpha^2 e^{i\theta} + 4 - 4\alpha)} \\ &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$, donc $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}) = \arg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $\left| \frac{z_G - 2}{z_F - 2} \right| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| = 1$ donc $AF = AG$, donc le triangle AFG est équilatère .

Exercice 23

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct

. F la transformation plane telle que :

$$F(M(z)) = M'(z') \quad \text{avec} \quad z' = \frac{i(z - 2i)}{(z - i)}$$

On considère les points $A(2i)$ et $B(i)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z' = z$.
2. On pose $z - i = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Ecrire sous forme trigonométrique le complexe z' .

(b) Montrer que :

$$(\forall z \in \mathbb{C} - \{i, 2i\}) ; \arg(z') = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi]$$

(c) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' imaginaire pur .

- 3.(a) Montrer que :

$$(\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}) ; (z' - i)(z - i) = 1$$

(b) En déduire l'image du cercle (C) de centre B et de rayon $r = 1$ par F .

4. C et D les points d'affixes respectivement $c = 1 + i$ et $d = -1 + i$.

(a) Montrer que :

$$(\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C}) = \pi + (\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC}) \quad [2\pi]$$

(b) Montrer que si M , C et D ne sont pas alignés alors les points M' , M , C et D sont cocycliques .

Correction

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct . F

la transformation plane telle que :

$$F(M(z)) = M'(z') \quad \text{avec} \quad z' = \frac{i(z-2i)}{(z-i)}$$

On considère les points $A(2i)$ et $B(i)$.

1.

$$\begin{aligned} z' = z &\Leftrightarrow \frac{i(z-2i)}{(z-i)} = z \quad \text{et} \quad z \neq i. \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0 \quad \text{et} \quad z \neq i. \end{aligned}$$

les solutions sont : $-1+i$ et $1+i$.

2. On pose $z-i = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(a)

$$\begin{aligned} z' &= \frac{i(e^{i\alpha} + i - 2i)}{(e^{i\alpha} + i - i)} \\ &= \frac{i(e^{i\alpha} - i)}{e^{i\alpha}} \\ &= i + e^{i\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i + e^{i\alpha} &= e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\alpha} \\ &= 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

Comme $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$, et donc $\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$, d'où l'écriture trigonométrique :

$$z' = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right).$$

(b)

$$\begin{aligned}
 (\forall z \in \mathbb{C} - \{i, 2i\}) ; \arg(z') &= \arg\left(\frac{i(z-2i)}{(z-i)}\right) [2\pi] \\
 &= \arg(i) + \arg\left(\frac{(z-2i)}{(z-i)}\right) [2\pi] \\
 &= \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{(z_M - z_A)}{(z_M - z_B)}\right) [2\pi] \\
 &= \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) [2\pi]
 \end{aligned}$$

(c) L'ensemble des points $M(z)$ tel que z' imaginaire pur est donc l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 [\pi]$ il s'agit de la droite (AB) privée des points A et B .

(a)

$$\begin{aligned}
 (\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}) ; (z' - i)(z - i) &= \left(\frac{i(z-2i)}{(z-i)} - i\right)(z-i) \\
 &= \left(\frac{1}{z-i}\right)(z-i) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(b) Si $M(z)$ un point du cercle (C) de centre B et de rayon $r = 1$ qui veut dire que : $|z - i| = r$. et soit $M'(z')$ son image par F .

On a :

$$\begin{aligned}
 (z' - i)(z - i) &= 1 \Rightarrow |z' - i||z - i| = 1 \\
 \Rightarrow |z' - i| &= \frac{1}{r} \\
 \Rightarrow AM' &= \frac{1}{r}.
 \end{aligned}$$

Donc M' appartient au cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{r}$.

3.(a)

$$\begin{aligned}
 \left(\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C} \right) - \left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC} \right) &= \arg \left(\frac{z_C - z'}{z_D - z'} \right) - \arg \left(\frac{z_C - z}{z_D - z} \right) \quad [2\pi] \\
 &= \arg \left(\frac{z_C - z'}{z_D - z'} \times \frac{z_D - z}{z_C - z} \right) \quad [2\pi]
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{z_C - z'}{z_D - z'} &= \frac{1 + i - z'}{-1 + i - z'} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{i-z}}{-1 + \frac{1}{i-z}} \\
 &= \frac{1 + i - z}{1 - i + z} \\
 &= -\frac{1 + i - z}{-1 + i - z} \\
 &= -\frac{z_C - z}{z_D - z}
 \end{aligned}$$

Par suite :

$$\frac{z_C - z'}{z_D - z'} \times \frac{z_D - z}{z_C - z} = -1$$

On conclut alors que :

$$\left(\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C} \right) = \pi + \left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC} \right) \quad [2\pi]$$

(b) Si M , C et D ne sont pas alignés et d'après ce qui précède on a :

$$\frac{z_C - z'}{z_D - z'} \times \frac{z_D - z}{z_C - z} = -1$$

alors les points M' , M , C et D sont cocycliques.**Exercice 24**

[A] Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_\theta) : z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{i2\theta} = 0.$$

[B] Dans le plan complexe (P) , rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectifs $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = ie^{i\theta}$.

1. Montrer que OM_1M_2 est un triangle isocèle et rectangle en O .

2. I le milieu du segment $[M_1, M_2]$.

(a) Montrer que lorsque θ varie dans $[0, 2\pi]$, I varie sur un cercle (C) de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Montrer que la droite (M_1M_2) est tangente à (C) .

3. On suppose que $\theta \in [0, \pi]$.

(a) montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

(b) En déduire la valeur de θ pour laquelle la droite (M_1M_2) est parallèle à $(O, \vec{v})$.

Correction

[A] Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_\theta) : z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{i2\theta} = 0.$$

Le discriminant de cet équation est

$$\Delta = ((1+i)e^{i\theta})^2 - 4ie^{i2\theta} = 2ie^{2i\theta} - 4ie^{i2\theta} = -2ie^{i2\theta} = [(1-i)e^{i\theta}]^2$$

D'où les solutions sont :

$$z = \frac{(1+i)e^{i\theta} + (1-i)e^{i\theta}}{2} = e^{i\theta} \quad \text{ou} \quad z = \frac{(1+i)e^{i\theta} - (1-i)e^{i\theta}}{2} = ie^{i\theta}.$$

[B] Dans le plan complexe (P) , rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectifs :

$$z_1 = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z_2 = ie^{i\theta}.$$

1. Calculons le rapport $\frac{z_2}{z_1}$:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} = i$$

On a :

$$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

et :

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{OM_2}{OM_1} = 1$$

ce qui nous affirme que le triangle OM_1M_2 est un triangle isocèle et rectangle en O .

2.(a) I le milieu du segment $[M_1, M_2]$, son affixe $z_I = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{(1+i)}{2}e^{i\theta}$.

(b)

$$OI = |z_I| = \left| \frac{(1+i)}{2}e^{i\theta} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc lorsque θ varie dans $[0, 2\pi]$, I appartient au cercle (C) de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) D'un côté $I \in (M_1M_2) \cap (C)$, d'un autre :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{M_1I}) &= \arg\left(\frac{z_I - z_1}{z_I}\right) \\ &= \arg\left(\frac{\frac{(1+i)}{2}e^{i\theta} - e^{i\theta}}{\frac{(1+i)}{2}e^{i\theta}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \arg \left(\frac{-1+i}{1+i} \right) \\
 &= \arg(i) \\
 &= \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]
 \end{aligned}$$

La droite (M_1M_2) est tangente à (C) en I .

3. On suppose que $\theta \in [0, \pi]$.

(a)

$$\begin{aligned}
 \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_1M_2} \right) &\equiv \arg(z_2 - z_1) \\
 &= \arg((-1+i)e^{i\theta}) \\
 &= \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}e^{i\theta}\right) \\
 &= \theta + \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]
 \end{aligned}$$

(b) La droite (M_1M_2) est parallèle à $(O, \overrightarrow{v})$ si et seulement si elle est perpendiculaire à $(O, \overrightarrow{u})$. cela est équivalent à :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_1M_2} \right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

et donc :

$$\theta + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

Soit :

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \quad [\pi]$$

Exercice 25

Partie I.

Soit m un nombre complexe non nul ; on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_m) : (z + 1)^2 + m^2 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E_m) .
2. Déterminer m pour que $e^{i\frac{\pi}{3}}$ soit solution de (E_m) .
3. Déterminer l'ensemble des points $M(m)$, pour que les solution de (E_m) aient meme module .

Partie II

Le plan est apporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.On considère les points M , B et C d'affixes respectifs m , $b = -1 + im$ et $c = -1 - im$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M(m)$, pour que les points M , B et C soient alignés.
2. On suppose que : $|m|^2 + \text{Re}(m) \neq 0$. Et soit R la transformation plane qui à tout point $M(z)$ lui associe le point $M(z')$ tel que :

$$z' = iz - 1.$$

(a) Montrer que R est une rotation , et préciser ses éléments caractéristiques (angle et centre Ω).

(b) Montrer que :

$$\left(\frac{c - m}{c - b} \right) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (\text{Im}(m) = |m|^2).$$

(c) En déduire l'ensemble des points $M(m)$ tel que M , B , C et Ω soient cocycliques.

(c) Remarquons que l'image du point $M(m)$ par R est B puisque $b = im - 1$.

Donc :

$$\left(\frac{b - \omega}{m - \omega} \right) = i$$

Pour que M , B , C et Ω soient cocycliques, il faut que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{m - c}{m - b} \right) \left(\frac{b - \omega}{m - \omega} \right) &= i \left(\frac{m - c}{m - b} \right) \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{m - c}{m - b} \right) &\in i\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow |m|^2 - \operatorname{Im}(m) &= 0 \end{aligned}$$

On raisonne comme dans la question 1 partie I. On trouve avec $m = x + iy$.

$$\begin{aligned} |m|^2 &= \operatorname{Im}(m) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y \\ \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre d'affixe $\frac{1}{2}i$ et de rayon $\frac{1}{2}$ pivé du point O ($m \neq 0$).

Correction**Partie I**

1.

$$(z+1)^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow (z+1+im)(z+1-im) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -1 - im \text{ ou } z = -1 + im$$

2. $e^{i\frac{\pi}{3}}$ solution de (E_m) si et seulement si $-1 - im = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $-1 + im = e^{i\frac{\pi}{3}}$ si et seulement si $m = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}+1}{-i} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i$ ou $m = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}+1}{i} = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$.

3.

$$|-1 - im| = |-1 + im| \Leftrightarrow |1 + im|^2 = |-1 + im|^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + im)(\overline{1 + im}) = (-1 + im)(\overline{-1 + im})$$

$$\Leftrightarrow (1 + im)(1 - i\overline{m}) = (-1 + im)(-1 - i\overline{m})$$

$$\Leftrightarrow 2i(m - \overline{m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble de ces points est l'axe des abscisses privé du point O , puisque $m \neq 0$.

Partie II

1. Les points M , B et C soient alignés si et seulement si $\left(\frac{m-c}{m-b}\right) \in \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{m-c}{m-b}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{m-c}{m-b}\right)} = \left(\frac{m-c}{m-b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m+im+1}{2im} = \frac{\overline{m}-i\overline{m}+1}{-2i\overline{m}}$$

$$\Leftrightarrow 2m\overline{m} + m + \overline{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow |m|^2 + \operatorname{Re}(m) = 0$$

Posons alors $m = x + iy$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |m|^2 + \operatorname{Re}(m) &= 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre d'affixe $-\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$ pivé du point O ($m \neq 0$).

2.(a) **Point fixe** $\Omega(\omega)$.

$$\begin{aligned} R(\Omega) &= \Omega \Leftrightarrow \omega = i\omega - 1 \\ &\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1 + i). \end{aligned}$$

Expression complexe de R . $R(M(z)) = M(z')$.

$$\begin{aligned} (1) \quad &\left\{ \begin{array}{l} z' = iz - 1 \\ (2) \quad \omega = i\omega - 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(1) – (2) donne

$$\begin{aligned} z' - \omega &= i(z - \omega) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega). \end{aligned}$$

Il s'agit de l'écriture complexe de la rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω .

(b)

$$\begin{aligned} \left(\frac{m-c}{m-b}\right) \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{m-c}{m-b}\right)} = -\left(\frac{m-c}{m-b}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{m+im+1}{2im} = -\frac{\bar{m}-i\bar{m}+1}{-2i\bar{m}} \\ &\Leftrightarrow 2m\bar{m}-m+\bar{m}=0 \\ &\Leftrightarrow |m|^2 - \operatorname{Im}(m) = 0 \end{aligned}$$