

Lycée Bensouda

Mathématiques

2022/2023

الفهرس

1. ملخصات الدروس.....01
2. سلاسل التمارين.....30
3. فروض منزلية و محروسة.....77
4. امتحانات تجريبية.....96
5. الامتحان الوطني لسنة 2022.....120

السلطة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والثانوي			
العطل المدرسية			
الموسم الدراسي : 2022 - 2023		جدول العطل المدرسية	
رت	العطل المدرسية	تواريخها	ع. الأيام
1	عيد المولد النبوي الشريف	12 و 13 ربيع الأول 1444 هـ	02
2	العطلة البينية الأولى	من يوم الأحد 23 أكتوبر 2022 إلى يوم الأحد 30 أكتوبر 2022	08
3	ذكرى المسيرة الخضراء	الأحد 6 نونبر 2022	01
4	عيد الاستقلال	الجمعة 18 نونبر 2022	01
5	العطلة البينية الثانية	من يوم الأحد 04 دجنبر 2022 إلى يوم الأحد 11 دجنبر 2022	08
6	فاتح يناير	الأحد فاتح يناير 2023	01
7	ذكرى تقديم وثيقة الاستقلال	الأربعاء 11 يناير 2023	01
8	عطلة منتصف السنة الدراسية	من يوم الأحد 22 يناير 2023 إلى يوم الأحد 29 يناير 2023	08
9	العطلة البينية الثالثة	من يوم الأحد 12 مارس 2023 إلى يوم الأحد 19 مارس 2023	08
10	عيد الفطر	من 29 رمضان إل 02 شوال 1444	03 أو 04
11	العطلة البينية الرابعة / عيد الشغل	من يوم الأحد 30 أبريل 2023 إلى يوم الأحد 7 ماي 2023	08
12	عيد الأضحى المبارك	من 08 إلى 11 ذو الحجة 1444هـ	04

Définitions

Soient f une fonction numérique définie sur un ouvert $I \ni a$.

❶ On dit f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

❷ On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

❸ On dit que f est continue à gauche en b si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow f \text{ est continue à droite et à gauche en } a$$

❹ On dit que f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I s'elle est continue en tout point de I .

❺ On dit que f est une fonction sur un intervalle $[a, b]$ s'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

❻ Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles, les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur leur domaine de définition.

Les opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

❶ les fonctions $f + g$, λf et fg sont continues sur I .

❷ Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .

❸ Si f et g sont deux fonctions continues sur I et J respectivement avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

❹ soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une fonction définie sur I avec $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et g est une fonction continue sur J avec $f(I) \subset J$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(l)$.

L'image d'un intervalle par une fonction continue

❶ l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

❷ l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

I	$f(I)$ si f est continue et str $\nearrow$	$f(I)$ si f est continue et str $\searrow$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$]a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$] -\infty, b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors :

L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Si de plus f est strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

La Dichotomie

Le but de cette méthode est d'approcher la solution d'une équation de type $f(x) = 0$.

Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, alors

$\exists ! \alpha \in]a, b[/ f(\alpha) = 0$. On a deux cas :

$$\begin{aligned} \hookrightarrow & \text{ si } f\left(\frac{a+b}{2}\right) f(b) < 0 \text{ alors } \alpha \in \left] \frac{a+b}{2}, b[. \\ \hookrightarrow & \text{ si } f\left(\frac{a+b}{2}\right) f(a) < 0 \text{ alors } \alpha \in \left] a, \frac{a+b}{2} [\end{aligned}$$

On continue de cette manière jusqu'à l'encadrement demandé de α .

La fonction réciproque

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$

La fonction qui lie chaque élément y de J avec l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$

s'appelle la fonction réciproque de f notée f^{-1} . On a donc :

$$\hookrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases},$$

$$\hookrightarrow \forall x \in I : (f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in J : (f \circ f^{-1})(x) = x.$$

$$\hookrightarrow f^{-1} \text{ est continue sur } f(I)$$

$$\hookrightarrow f \text{ et } f^{-1} \text{ ont la même monotonie.}$$

$$\hookrightarrow (C_{f^{-1}}) \text{ et } (C_f) \text{ sont symétrique par rapport à } y = x \text{ dans un repère orthonormé.}$$

La fonction racine n^{me}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Alors elle admet une fonction réciproque sera noté $\sqrt[n]{}$. On a :

$$\hookrightarrow \sqrt[n]{} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

$$\hookrightarrow (\forall x, y \in [0, +\infty[) : \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

$$\hookrightarrow (\forall x \in [0, +\infty[) : (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$\hookrightarrow \text{Si } r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ avec } q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \in \mathbb{Z}, \text{ on pose } (\forall x \in]0, +\infty[) : x^r = \sqrt[q]{x^p}$$

$$\hookrightarrow \text{La fonction } x \mapsto x^r \text{ est continue sur }]0, +\infty[, \text{ pour tout } r \in \mathbb{Q}.$$

$$\hookrightarrow \text{pour tout } r, r' \in \mathbb{Q} \text{ et pour tout } x, y \in]0, +\infty[\text{ on a :}$$

$$x^{r+r'} = x^r x^{r'}; \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}; x^{rr'} = (x^r)^{r'}; \frac{1}{x^r} = x^{-r}; \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}; (xy)^r = x^r y^r,$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}; \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{y^2})}$$

La fonction arctan

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue et strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors elle admet une fonction réciproque noté arctan.

$$\hookrightarrow \text{La fonction } x \mapsto \arctan(x) \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

$$\hookrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : \tan(\arctan(x)) = x; (\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) : \arctan(\tan(x)) = x$$

$$\hookrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); (\forall y \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) : \arctan(x) = y \iff x = \tan(y)$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

Les suites numériques

La suite major e, minor e et born e

- ❶ Une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est **major e** s'il existe un r el M tel que $(\forall n \geq n_0) : U_n \leq M$
- ❷ Une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est **minor e** s'il existe un r el m tel que $(\forall n \geq n_0) : U_n \geq m$.
- ❸ Une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est **born e** s'il existe un r el positif C tel que $(\forall n \geq n_0) : |U_n| \leq C$. (ie. la suite est major e et minor e la fois)
- ✎ Toute suite positive est minor e par 0. ✎ Toute suite n gative est major e par 0.

La monotonie d'une suite

- ❶ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n \geq 0$
- ❷ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n > 0$
- ❸ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est d croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n \leq 0$.
- ❹ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est strictement d croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n < 0$.
- ❺ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est constante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} = U_n$
- ✎ Une suite croissante est minor e par son premier terme. (ie. $(\forall n \geq n_0) : U_n \geq U_{n_0}$)
- ✎ Une suite d croissante est major e par son premier terme. (ie. $(\forall n \geq n_0) : U_n \leq U_{n_0}$)

La suite arithm tique/g om trique

une suite	Arithm tique	G om trique
La d finition $(\forall n \geq n_0)$	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$
Terme g n ral $(\forall n \geq n_0)$	$U_n = U_p + (n - p)r$	$U_n = U_p q^{n-p}$
la somme $S_n = U_p + ..U_n$	$S_n = \left(\frac{n - p + 1}{2}\right) (U_p + U_n)$	$S_n = \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}\right) U_p$

Limite d'une suite

- ❶ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est convergente s'elle existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$$

- ❷ On dit qu'une suite $(V_n)_{n \geq n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists N > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq N \Rightarrow U_n > A$$

③ Toute suite croissante et majorée est convergente.

④ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

⑤

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : |U_n - l| \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \end{array} \right\} \implies (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : W_n \leq U_n \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l \end{array} \right\} \implies (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : W_n \leq U_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \text{ et } (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est divergente}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : U_n > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \end{array} \right\} \implies l \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : U_n \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l' \end{array} \right\} \implies l \leq l'$$

⑥ Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ et soit $q \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \\ f \text{ est continue en } l \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n) = f(l)$$

$$\textcircled{8} \left\{ \begin{array}{l} (i) f \text{ est continue sur } I \\ (ii) U_{n+1} := f(U_n) \\ (iii) U_0 \in I \\ (iv) f(I) \subset I \\ (v) (U_n) \text{ est convergente} \end{array} \right\} \implies \text{la limite de } (U_n) \text{ est une sol de } f(x) = x \text{ sur } I$$

Les suites adjacentes

Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes lorsque :

① $(u_n)_n$ est croissante. ② $(v_n)_n$ est décroissante. ③ $\lim(v_n - u_n) = 0$.

↘ Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite.

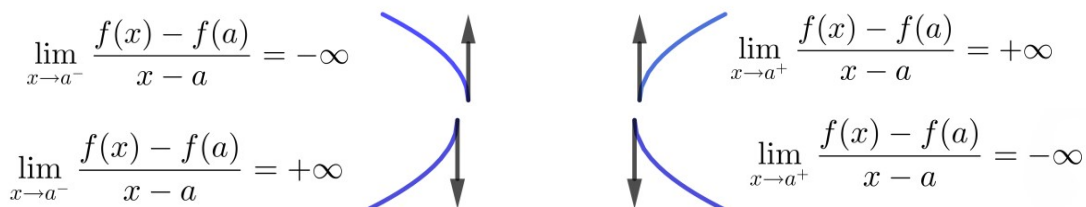
Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I \ni a$. On dit que :

- ❶ f est dérivable en a s'il existe un réel l t.q. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$ ($:= f'(a)$).
- ❷ f est dérivable à droite de a s'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$ ($:= f'_d(a)$).
- ❸ f est dérivable à gauche de a s'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$ ($:= f'_g(a)$).
- ❹ f est dérivable sur I s'elle est dérivable en tout point de I .
- ❺ f est dérivable sur $[a, b]$ s'elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b .

Interprétation géométrique

- ❶ Si f est dérivable en a alors (C_f) admet une tangente d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ au point $(a, f(a))$
- ❷ Si f est dérivable à droite au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation
$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$
 au point $(a, f(a))$
- ❸ Si f est dérivable à gauche au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation
$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$
 au point $(a, f(a))$
- ❹ Si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ alors (C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$.



- ❺ Si f est dérivable au point a , la fonction g définie par $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ est une approximation affine de f au voisinage de a et on a :

$$x \simeq a \implies f(x) \simeq g(x)$$

Tableau des fonctions dérivées et ces opérations

la fonction f	la dérivée f'	intervalle
$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^r, r \in \mathbb{Q}^*$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$
$x \mapsto \arctan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

la fonction f définie sur I	la dérivée de f sur I	Conditions
$u + v ; uv$	$u' + v' ; u'v + uv'$	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0 \text{ sur } I$
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^n$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u \neq 0 \text{ sur } I$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0 \text{ sur } I$
$\sqrt[n]{u}, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{u'}{(n\sqrt[n]{u})^{n-1}}$	$u > 0 \text{ sur } I$
$u^r, r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$ru'u^r$	$u > 0 \text{ sur } I$
$x \mapsto u(ax + b), a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto au'(ax + b)$	$]0, +\infty[$
$\arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$	
$\sin(u) ; \cos(u)$	$u' \cos(u) ; -u' \sin(u)$	
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

La dérivée du composé

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$, alors $f \circ g$ est dérivable et on a : $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \ (\forall x \in I)$.

La dérivée de la réciproque

Soit f une fonction bijective et dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur $f(I) = J$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a : $(\forall x \in J) : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Théorème des Accroissement Finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] & \text{TAF} \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\end{cases} \implies (\exists c \in]a, b[) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Inégalité des Accroissement Finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] & \text{IAF} \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ \beta \leq f'(x) \leq \alpha \end{cases} \implies \beta \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \alpha$$

Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

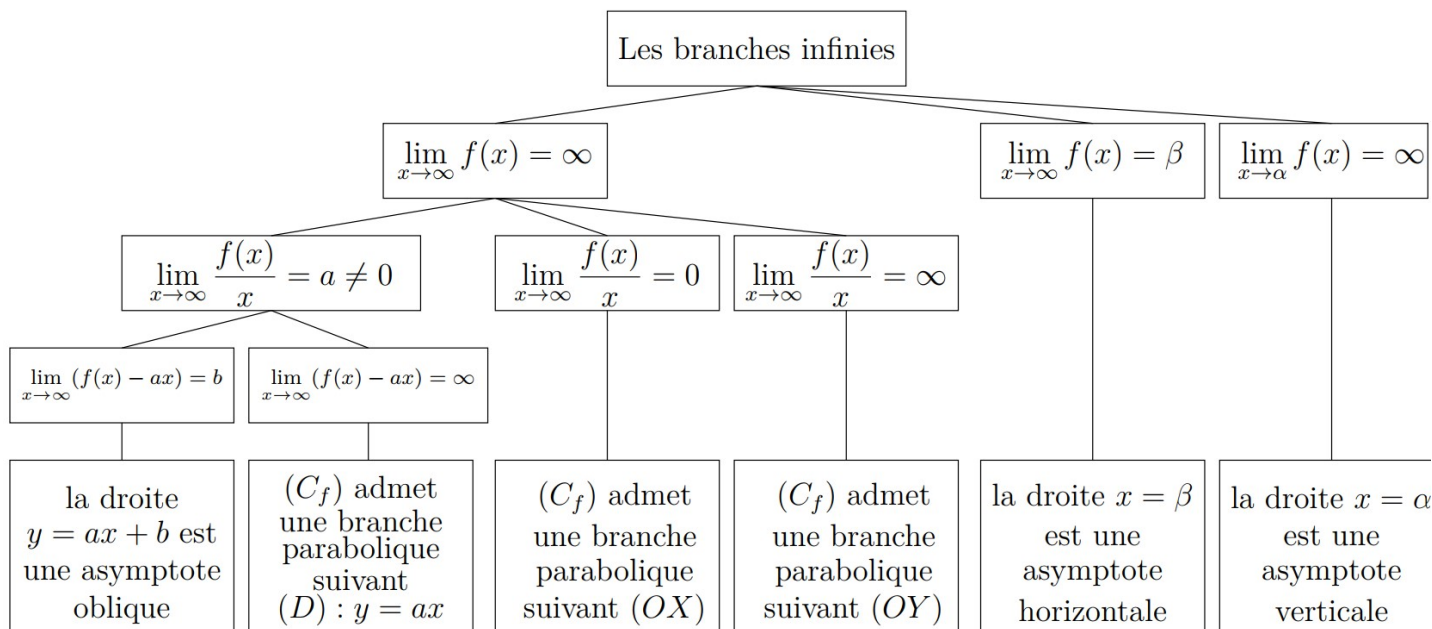
$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] & \text{Rolle} \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \implies (\exists c \in]a, b[) : f'(c) = 0$$

Les branches infinies

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$

$$\iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Les branches infinies



Parité de f et éléments de symétrie

Type de f	Définition	Objectifs
f est paire	$\forall x \in D_f \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	Etudier f sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ (C_f) est symétrique % (OY)
f est impaire	$\forall x \in D_f \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$	Etudier f sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ (C_f) est symétrique par à O
f est périodique de période $T > 0$	$\forall x \in D_f \begin{cases} x + T \in D_f \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T
Axe de sym/ Centre de sym	Définition	Objectif
la droite $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f)	$\forall x \in D_f \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$	Etudier f sur $D_f \cap [a, +\infty[$
la point $\Omega(a, b)$ est un centre de de symétrie de C_f	$\forall x \in D_f \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$	Etudier f sur $D_f \cap [a, +\infty[$

Le logarithme népérien

• Le logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qui s'annule en **1**. Noté par "**ln**".

• $D_{\ln} =]0, +\infty[$,

• **ln** est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $(\forall x \in]0, +\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

• **ln** est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

• L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution noté **e** telle que $e = 2,718\dots$

Propriétés

Pour tout **a** et **b** de $]0, +\infty[$ et **r** de $\mathbb{Q}$:

• $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ • $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

• $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ • $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ • $\ln(a^r) = r\ln(a)$

• $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$. • $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

• $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Etude du fonction ln

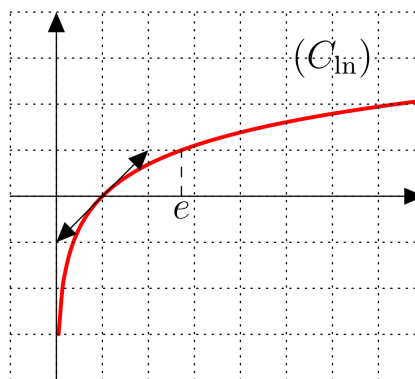
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln(x) = 0 \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

• Tableau de variation du **ln** et ça courbe :

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	+	
ln(x)	$-\infty$	$+\infty$



• Soit **u** une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle **I**. La fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle La dérivée logarithmique de **u** sur **I**.

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'elle ne s'annule jamais sur I , alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la dérivée logarithmique de u . c.à.d. $(\forall x \in I) : f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I . Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|u(x)|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Logarithme à la base a

- Soit a un réel strictement positif et différent de 1. Le logarithme à base a est la fonction noté $\log_a$ et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
- Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$ et si $a = e$ $\log_e = \ln$.
- $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, $\log_a(e) = \frac{1}{\ln(a)}$

Soient $x, y \in]0, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$; $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$.
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$; $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$, $(\forall r \in \mathbb{Q})$

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

$0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
$\log'_a$		—
$\log_a$		$+\infty \rightarrow -\infty$

$a > 1$

x	0	$+\infty$
$\log'_a$		+
$\log_a$		$-\infty \rightarrow +\infty$

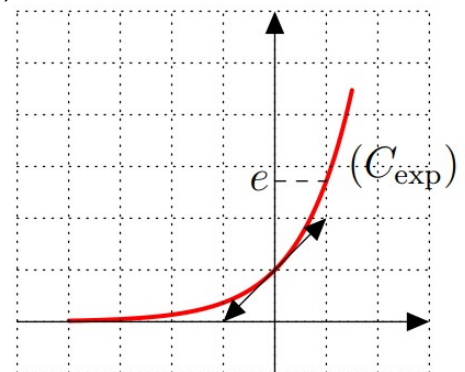
L'exponentielle népérien

- La réciproque de la fonction **ln** s'appelle *La fonction exponentielle népérienne* notée **exp** : $\mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.
- Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in]0, +\infty[$, On a : $\exp(r) = a \Leftrightarrow r = \ln(a) \Leftrightarrow \ln(e^r) = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^r$. Donc $\exp(r) = e^r$ pour tout r de $\mathbb{Q}$. On prolonge cette expression à $\mathbb{R}$ et on aura : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp(x) = e^x$
- La fonction **exp** est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $e^1 = e$; $e^0 = 1$; $e^x > 0, (\forall x \in \mathbb{R})$.

Propriétés

- $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x$ $(\forall x \in]0, +\infty[) : e^{\ln(x)} = x$
 - $\begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in]0, +\infty[\end{cases}$
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$
 - $e^x e^y = e^{x+y}$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$; $e^{rx} = (e^x)^r$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0$; $(\forall n \in \mathbb{N})$
 - La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x, (\forall x \in \mathbb{R})$.
 - Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}, (\forall x \in I)$

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	+	
e^x	$0 \nearrow +\infty$	



L'exponentielle à la base a

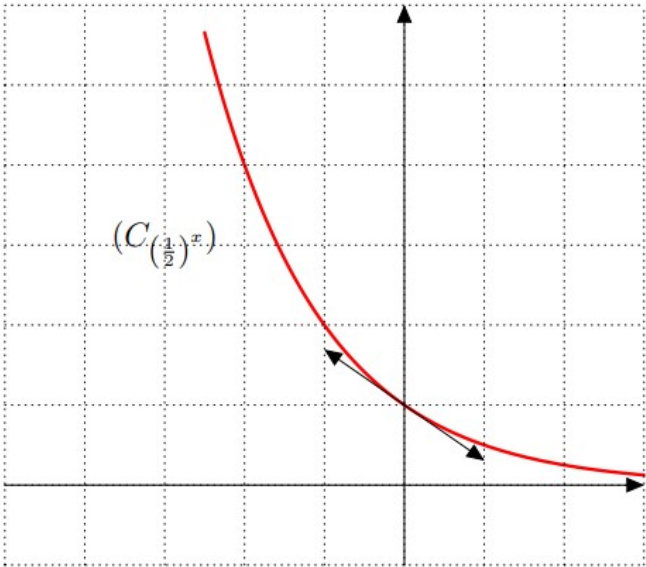
- Soit a un réel strictement positif et différent de 1. L'exponentielle à base a est la fonction $\exp_a : x \mapsto e^{x \ln(a)} = a^x$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp_a(x) = e^{x \ln(a)} = a^x$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

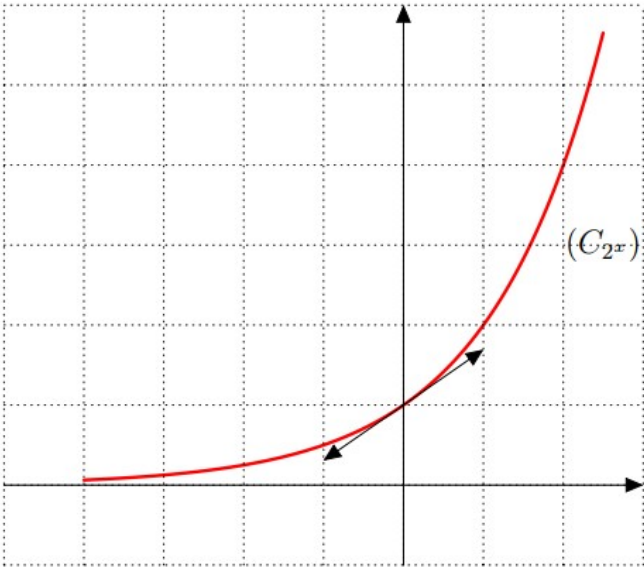
- $a^x a^y = a^{x+y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{xy} = (a^x)^y$ $a^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : (a^x)' = \ln(a)a^x$.
- $\begin{cases} a^x < a^y \Leftrightarrow x > y & , 0 < a < 1 \\ a^x < a^y \Leftrightarrow x < y & , a > 1 \end{cases}$

$0 < a < 1$			$a > 1$		
x	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln(a)a^x$	-		$\ln(a)a^x$	+	
a^x	$+\infty$	$\searrow$ 0	a^x	0	$\nearrow$ $+\infty$

$$a = \frac{1}{2}$$



$$a = 2$$



Définitions et Notations

L'ensemble des nombres complexes est : $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

- La forme algébrique du nombre complexe z est : $a + ib$.

- La partie réelle du nombre complexe z est : $\operatorname{Re}(z) = a$.

- La partie imaginaire du nombre complexe z est : $\operatorname{Im}(z) = b$.

- Le nombre complexe z est imaginaire pur si $\operatorname{Re}(z) = 0$.

- Égalité de deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$

- Le conjugué du nombre complexe z est : $\bar{z} = a - ib$

- Le module du nombre complexe z est : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

- L'image du nombre complexe $z = a + ib$ est le point $M(a, b)$, noté $M(z)$

- L'affixe du point $M(a, b)$ est le nombre complexe $z_M = a + ib$.

- L'affixe du vecteur $\vec{u}(a, b)$ est le nombre complexe $z_{\vec{u}} = a + ib$.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

- L'argument de z non nul est une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ noté $\arg z$.

avec $\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ $\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$

- La forme trigonométrique du nombre complexe non nul z est :

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$ avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

- La forme exponentielle du nombre complexe non nul z est : $z = re^{i\theta}$

avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

Propriétés

	<i>Conjugué</i>	<i>Module</i>	<i>Argument</i>
<i>Opposé</i>	$\overline{-z} = -\bar{z}$	$ -z = z $	$\arg(-z) \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
<i>Conjugué</i>	$\bar{\bar{z}} = z$	$ \bar{z} = z $	$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z[2\pi]$
<i>Produit</i>	$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$	$ z \times z' = z \times z' $	$\arg(z z') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$
<i>Puissance</i>	$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$	$ z^n = z ^n$	$\arg(z^n) \equiv n \arg z[2\pi]$
<i>Inverse</i>	$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$
<i>Quotient</i>	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$
<i>Somme</i>	$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$	$ z + z' \leq z + z' $	—

	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Conjugué	$\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
Opposé	$-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$	$-re^{i\theta} = re^{\pi + i\theta}$
Produit	$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$	$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta + \theta')}$
Formule Moivre	$[r, \theta]^n = [r^n; n\theta]$	$(re^{i\theta})^n = r^n e^{i(n\theta)}$
Inverse	$\frac{1}{[r; \theta]} = \left[\frac{1}{r}; -\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
Quotient	$\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta - \theta')}$
Formules d'Euler	$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$	
Somme	$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$	
Différence	$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$	

$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ $z\bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$ $ z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$	$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = k\pi/k \in \mathbb{Z}$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}$
--	---

Equation du deuxième degré

L'équation	le discriminant	Ensemble de solution
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$\Delta > 0$	$\left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$
Formules de viète	$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$	

Nombres complexes et géométrie

Formule complexe	Inérprétation géométrique
$ z_B - z_A $	la distance AB
$ z - z_A = r \quad (r > 0)$	M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$ z - z_A = z - z_B $	M appartient à la médiatrice de $[AB]$
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \in \mathbb{R}_A$	I milieu de $[AB]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$	A, B et C trois points alignés
$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \cdot \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$	A, B, C et D sont cocycliques
$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$	mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

La Condition	Nature du triangle ABC
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle rectangle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC est un triangle isocèle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle isocèle et rectangle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right]$	ABC est un triangle équilatéral

Transformations usuelles

La Transformation	Ecriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
Homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k	$z' - w = k(z - w)$
Rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ	$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

Reconnaitre une translation, une homothétie ou une rotation à partir de leurs expressions complexes

$z \mapsto az + b$ $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$	$a = 1$	F est une translation de vecteur $\vec{u}(b)$
	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	F est une homothétie $H\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right), k = a\right)$
	$ a = 1$ et $a \neq 1$	F est une rotation : $R\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right), \theta \equiv \arg(a)[2\pi]\right)$
	$ a = 1$ et $a \notin \mathbb{R}$	$F = R \circ H = H \circ R$ avec $R\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right), \theta \equiv \arg(a)[2\pi]\right)$ et $H\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right), k = a \right)$

Racines n'ème d'un nombre complexe

Le nbr complx	Condition		La racine carré
$z = a + ib$ $a, b \in \mathbb{R}$	$b = 0$	$a > 0$	$\sqrt{a}$ ou $-\sqrt{a}$
		$a < 0$	$i\sqrt{a}$ ou $-i\sqrt{a}$
	$a = 0$	$b > 0$	$\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$ ou $-\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$
		$b < 0$	$\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)$ ou $-\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)$
	$b \neq 0$	$a \neq 0$	$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{signe}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right)$

Exemple : Les racines carrées de $Z = -3 + 4i$, on pose $z = x + iy$ on a donc $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, $|z^2| = x^2 + y^2$ et $|Z| = 5$.

$$\text{donc } z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

En fin $z = 1 + 2i$ et $z = 1 - 2i$ sont les deux racines carrées de $Z = -3 + 4i$

- On appelle **racine n'ème** ou **racine d'ordre n** d'un nombre complexe Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

- Les racines n'èmes de $Z = [r, \theta]$ sont $z_k = [\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}]$ (avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$)

- La somme des racines n'èmes d'un nombre complexe est nulle $\sum_{i=0}^{n-1} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = 0$.

Définition

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F sa primitive sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur I et a, b et c de I et $k \in \mathbb{R}$.

- ❶ $\star \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- ❷ Relation de Chasles : $\star \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- ❸ La linéarité de l'intégrale : $\star \int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
 $\star \int_a^b (kf)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- ❹ Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- ❺ Si $0 \leq g \leq f$ sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$
- ❻ si $a \leq b$ on a : $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- ❼ $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$ avec $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$
- ❽ Il existe au moins $c \in [a, b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$ (la valeur moyenne).

Techniques de calcul intégral

- ❶ **Calcul direct** : se fait par trouver une primitive de f à intégrer sur l'intervalle I .
- ❷ **Intégration par partie** :

Soient f et g deux fonctions dérivables et leurs dérivées sont continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Exemple : $\int_1^e \ln(x) dx = \int_1^e (x)' \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = e - (e-1) = 1$

❸ Changement de variables :

Soit g une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que g' une continue sur $[a, b]$. Soit f une fonction continue sur $g([a, b])$. Alors :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Exemple :

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{t^2+1} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} 1 - \frac{1}{t^2+1} dt =$$

Sommes de Rieman

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{alors les}$$

suites (s_n) et (S_n) convergent et admettent $\int_a^b f(x)dx$ comme limite commune.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$

Calcul des aires et volumes

❶ Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et (C_f) et (C_g) leurs courbes. L'aire comprise entre (C_f) (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A}(f, g, a, b) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.a$$

Remarque 1 : Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de l'aire est $u \cdot a = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\|$

❷ Soient un solide compris entre deux plans parallèles d'équations $z = a$ et $z = b$. On note par $S(t)$ l'aire d'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $z = t$ (la section du solide par le plan d'équation $z = t$). Si la fonction $t \mapsto S(t)$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors le volume V du solide, en u.v. est donné par :

$$V = \int_a^b S(t) dt$$

$\Rightarrow f$ une fonction continue et D le domaine limité par (C_f) , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ Alors le volume V du solide de révolution engendré par la

rotation de D autour de l'axe (Ox) est :

$$V = \pi \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right) u.v$$

Remarque 2 : L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ L'unité de volume est $u.v = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \|\vec{k}\|$

Les primitives des fonctions usuelles

La fonction f	Les primitives de f	Intervalle
$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$] 0, +\infty[$
$x \mapsto x^r, r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$] 0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Les primitives et les opérations

La fonction f définie sur I	Une primitives de f sur I	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
$u'v + uv'$	uv	
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	$v \neq 0 \text{ sur } I$
$u'u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u \neq 0 \text{ sur } I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0 \text{ sur } I$
$\frac{u'}{(\sqrt[n]{u})^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*$	$n\sqrt[n]{u}$	$u > 0 \text{ sur } I$
$u'u^r, r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$u > 0 \text{ sur } I$
$x \mapsto u'(ax + b), a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}u(ax + b)$	$]0, +\infty[$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$	
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	
$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$	$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u \neq 0$
$u'e^u$	e^u	

L'équation $y' = ay + b$

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

L'équation différentielle	La solution générale
$y' = ay$	$y(x) = ce^{ax}; c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$	$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$
$y' = ay + b$	$y(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}; c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$	$y(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

L'équation $y'' + ay' + by = 0$

L'équa. diff. et son equa. cara.	Si	Les Solutions de l'équa. car.	Les solutions générale de l'équa. diff.
$y'' + ay' + by = 0$ et son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$	$\Delta > 0$	Deux solutions réelles différentes r_1 et r_2	$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
	$\Delta = 0$	Une solution réelle double r	$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{rx}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
	$\Delta < 0$	Deux solutions complexes $r_1 = p + iq$ et $\overline{r_1}$	$y(x) = (C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)) e^{px}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Divisibilité-Division Euclidienne

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Définition : b divise $a \Leftrightarrow b \mid a \Leftrightarrow a$ multiple de $b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = kb$.

- | | |
|---|---|
| • $a \mid a$ | • $a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n$ |
| • $\begin{cases} a \mid b \\ b \mid a \end{cases} \Rightarrow a = b $ | • $\begin{cases} a \mid b \\ b \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid c$ |
| • $\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid \alpha b + \beta c \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$ | • $\begin{cases} a \mid b \\ a' \mid b' \end{cases} \Rightarrow aa' \mid bb'$ |

D.Euclidienne : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Alors $\exists!(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$

Congruence modulo n

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

❶ a congrue b modulo $n \Leftrightarrow a \equiv b[n] \Leftrightarrow n \mid (a - b) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : a - b = kn$

$\Leftrightarrow a$ et b ont le même reste de la division euclidienne sur n

❷ la relation "Congruence modulo" est dite **relation d'équivalence** :

(a) La réflexivité : $a \equiv a[n], \forall a \in \mathbb{Z}$.

(b) La symétrique : $a \equiv b[n] \Rightarrow b \equiv a[n], \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

(c) La transitivité : $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n] \Rightarrow a \equiv c[n], \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

❸ $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d[n] \\ ac \equiv bd[n] \end{cases}, \quad \text{❹ } ac \equiv bc[n] \Leftrightarrow a \equiv b \left[\frac{n}{d} \right] \quad (d = c \wedge n).$

❺ $a \equiv b[n] \Rightarrow a^p \equiv b^p[n] \quad n \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0[n] \quad a \equiv a + kn[n]$

❻ L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{(n-1)}\}$ avec $\bar{r} = \{a \in \mathbb{Z} / a \equiv r[n]\}, \forall r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ On a donc $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \dots \cup \overline{(n-1)}$

PGCD et PPCM

PGCD	PPCM
• Le plus grand commun diviseur de a et b est le plus grand diviseur commun strictement positif de a et b ($a \wedge b$) • $a \wedge 1 = 1$ • $a \wedge a = a$ • $a \wedge b = b \wedge a$ • $a \wedge b = a \wedge b$ • $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ • $ab \wedge ac = a (b \wedge c)$ • $a \wedge b/a$ et $a \wedge b/b$ • a/b et $a/c \Rightarrow a/b \wedge c$ • $a/b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ • $a \wedge b = d \Rightarrow (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}) d = \alpha a + \beta b$	• Le plus petit commun multiple de a et b est le plus petit multiple commun strictement positif de a et b ($a \vee b$) • $a \vee 1 = a$ • $a \vee a = a$ • $a \vee b = b \vee a$ • $a \vee b = a \vee b$ • $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ • $ab \vee ac = a (b \vee c)$ • $a/a \vee b$ et $b/a \vee b$ • a/c et $b/c \Rightarrow a \vee b/c$ • $a/b \Leftrightarrow a \vee b = b$ • $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$ • $a \wedge b/a \vee b$
• Algorithme d'Euclide : Si $a = bq + r \Rightarrow a \wedge b = b \wedge r$ ainsi $a \wedge b$ est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.	

les nombres premiers entre eux

Définition	On dit que a et b sont <i>premiers entre eux</i> si $a \wedge b = 1$.
Théorème de Bezout	$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2) : au + bv = 1.$ $a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$
Et ces conséquences	$\begin{cases} a \wedge c = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1; a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$
Théorème de Gauss	$\begin{cases} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a \mid c.$
Et ces conséquences	$\begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab \mid c; \begin{cases} ab \equiv ac[n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow b \equiv c[n]$
$(E) : ax + by = c$	• (E) admet des solutions $\Leftrightarrow a \wedge b \mid c$. • $S_{(E)} = \left\{ \left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b} \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$ avec (x_0, y_0) est une solution particulière.

Les nombres premiers

Définition :	● p est un nombre premier $\Leftrightarrow D_p = \{-1, 1, -p, p\}$ ● Le plus petit diviseur positif de a différent de 1 est un nombre premier ● L'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ est infini.
Propriétés :	❶ a n'est pas premier $\Rightarrow (\exists p \in \mathbb{P}), p \mid a$ et $p^2 \leq a$. ❷ $(\forall p, q \in \mathbb{P}) : (p \neq q \Leftrightarrow p \wedge q = 1)$ ❸ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \mid a^n \end{cases} \Rightarrow p \mid a$ ❹ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \nmid a \end{cases} \Rightarrow p \wedge a = 1$ ❺ $\begin{cases} p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq k < p \end{cases} \Rightarrow p \wedge k = 1$ ❻ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \mid ab \end{cases} \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b$ ❼ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \mid ab \Rightarrow p \mid b \\ p \nmid a \end{cases}$ ❽ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \mid a_1 a_2 \dots a_n \end{cases} \Rightarrow \exists i \in [1, n]; p \mid a_i$ ❾ $\begin{cases} \forall i \in [1, n]; p_i \in \mathbb{P} \\ p \in \mathbb{P} \\ p \mid p_1 p_2 \dots p_n \end{cases} \Rightarrow \exists i \in [1, n]; p = p_i$
Théorème de Fermat :	$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{cases} \Rightarrow a^{n-1} \equiv 1[p] \Leftrightarrow p \in \mathbb{P}; a^p \equiv a[p]$
Pour vérifier qu'un entier $a > 2$ est premier ou non :	On détermine tous les nombres premiers p tels que $p^2 \leq a$ ● Si l'un de ces nombres divise a alors a est non premier. ● Sinon, a est premier.

Système de numération

une base d'un système de numération est le cardinal de l'ensemble des nombres utilisés pour représenter les nombres entiers naturels. Exemples :

❶ La base du système de numération décimale est 10 et l'ensemble des nombres utilisés est $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

❷ La base du système de numération binaire est 2 et l'ensemble des nombres utilisés est $\{0, 1\}$.

$$x = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_1 b + a_0 = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}(b), \text{ avec } 0 \leq a_i \leq b-1$$

❸ Critères de divisibilités :

Si $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{(10)}$ alors :

$x \equiv 0[2]$	$\Leftrightarrow a_0 \equiv 0[2]$
$x \equiv 0[3]$	$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0[3]$
$x \equiv 0[4]$	$\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0[4]$
$x \equiv 0[5]$	$\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 5$
$x \equiv 0[7]$	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} + 5.a_0 \equiv 0[7]$
$x \equiv 0[9]$	$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0[9]$
$x \equiv 0[11]$	$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \equiv 0[11]$
$x \equiv 0[25]$	$\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0, 25, 50, 75\}$

La décomposition en facteurs premiers

• Chaque nombre $a \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$ s'écrit d'une façon unique de la forme $a = \epsilon.p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ telle que $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont des nombres premiers positives différents deux à deux et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ des nombres entiers naturels non nuls et $\epsilon = \pm 1$. Cette écriture s'appelle la *Décomposition de a en facteurs premiers*.

• Le nombre de diviseurs de a est $x = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n)$

• Soient $a = \epsilon \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ et $b = \epsilon \prod_{i=1}^n p_i^{\beta_i}$, alors :

$$a \wedge b = \prod_{i=1}^k p_i^{\inf(\alpha_i, \beta_i)}, a \vee b = \prod_{i=1}^k p_i^{\sup(\alpha_i, \beta_i)}.$$

Soit E un ensemble.

Loi de composition interne

- On appelle *Loi de composition interne* toute application f de $E \times E$ dans E .
- $f(x, y)$ s'appelle le composé de x et y noté par $x \mathbf{T} y$, $x \perp y$ ou $x * y \dots$ et si E est muni d'une *Loi de composition interne* $*$ on note $(E, *)$.

- Les matrices carrées

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} ; (a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9 \right\}. \text{ On admet que :}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

et de même pour $M_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

- **Partie stable** : Soit H une partie de E . H est une *partie stable* pour $*$ si pour tous x et y de H on a : $x * y \in H$.

- **Associativité** : $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in E$.

- **Commutativité** : $x * y = y * x, \forall x, y \in E$.

- **L'élément neutre** : $x * e = e * x = x, \forall x \in E$.

- **Le symétrique d'un élément** : on suppose que $*$ possède un élément neutre e dans E . On dit que x de E a un symétrique dans $(E, *)$ ssi il existe x' de E tel que $x * x' = x' * x = e$.

- **Un élt. simplifiable** : on dit que a est régulier dans $(E, *)$ ssi $\forall (x, y) \in E^2$:
$$\begin{cases} x * a = y * a \Rightarrow x = y \\ a * x = a * y \Rightarrow x = y \end{cases}.$$

- **Un élt. absorbant** : on dit que a est absorbant dans $(E, *)$ ssi $\forall x \in E : x * a = e$ et $a * x = e$.

Soient $(E, *)$ et (F, T) .

● **Morphisme ou Homomorphisme** : Toute application $f : E \rightarrow F$ telle que :
 $f(x * y) = f(x)Tf(y)$ pour tout (x, y) de E^2

$\hookrightarrow$ Si f est un morphisme alors f transmet les propriétés de $*$ dans E à T dans $f(E)$.

$\hookrightarrow$ Si de plus f est surjectif alors $f(E) = F$. Donc f transmet les propriétés de $*$ dans E à T dans F .

Groupe

Soit G un ensemble non vide.

● **Groupe** : Soit $(G, *)$. On dit que $(G, *)$ est un groupe si :

- ❶ La loi $*$ est associative.
- ❷ La loi $*$ admet un élément neutre dans G .
- ❸ Tout élément de G a un symétrique dans $(G, *)$.

Si de plus $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif (ou abélien).

● **Sous Groupe** : Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie non vide de G . On dit que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si $(H, *)$ est un groupe.

$$\begin{aligned}
 (H, *) \text{ est un sous-groupe de } (G, *) &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{❶ } H \neq \emptyset \text{ et } H \subset G \\ \text{❷ } H \text{ est stable par } * \\ \text{❸ } H \text{ est stable par passage au symétrique} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{❶ } H \neq \emptyset \text{ et } H \subset G \\ \text{❷ } x * y \in H, \forall (x, y) \in H^2 \\ \text{❸ } x' \in H, \forall x \in H \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{❶ } H \neq \emptyset \text{ et } H \subset G \\ \text{❷ } x * y' \in H, \forall (x, y) \in H^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

● **Morphismes de groupes** :

Soient $(G, *)$ et (K, T) deux groupes et f est un morphisme de $(G, *)$ dans (K, T) .

- ❶ Si e est l'élément neutre de $(G, *)$ alors $f(e) = e'$ est l'élément neutre de (K, T) .
- ❷ $(f(G), T)$ est groupe.
- ❸ Si de plus $(G, *)$ est un groupe abélien alors $(f(G), T)$ est groupe abélien.

Anneau

Soit A un ensemble non vide muni de deux LCI $*$ et T .

- $(A, *, T)$ est un anneau ssi $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{①} \ (A, *) \text{ est une groupe abélien.} \\ \textbf{②} \ T \text{ est associative dans } A. \\ \textbf{③} \ T \text{ est distributive sur } * \end{array} \right.$

$\hookrightarrow$ Si de plus T possède un élément neutre alors $(A, *, T)$ est dite Anneau Unitaire.

$\hookrightarrow$ Si de plus T est commutative alors $(A, *, T)$ est un anneau commutative

- On dit que $x \in A \setminus \{0_A\}$ est un diviseur de zéro dans l'anneau A si il existe $y \in A \setminus \{0_A\}$ tel que : $xTy = 0_A$ ou $yTx = 0_A$.

- Un anneau $(A, *, T)$ n'admet aucun diviseur de zéro veut dire que :

$$(\forall (x, y) \in^2 A) : \quad xTy = 0_A \Leftrightarrow x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

- On dit qu'un anneau $(A, *, T)$ est intègre s'il n'est pas réduit à zéro et n'admet aucun diviseur de zéro.

- Si x est inversible dans (A, T) , alors x n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau $(A, *, T)$.

Corps

- On appelle corps tout anneau unitaire $(K, *, T)$ non réduit à zéro tel que tout élément autre que zéro est inversible pour la loi T .

Un corps est dit commutatif si la deuxième loi est commutative.

- $(K, *, T)$ est un corps ssi $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{①} \ (K, *) \text{ est un groupe commutatif.} \\ \textbf{②} \ (K \setminus \{0_K\}, T) \text{ est un groupe.} \\ \textbf{③} \ \text{La loi } T \text{ est distributive par rapport à la loi } * \end{array} \right.$

- Si $(K, *, T)$ est un corps alors :

$\hookrightarrow$ Tout élément de $K \setminus \{0_K\}$ est régulier pour T .

$\hookrightarrow (K, *, T)$ est un anneau intègre.

$\hookrightarrow$ Pour tous $(a, b) \in K \setminus \{0_K\} K$, on a : $aTx = b \Leftrightarrow x = a'Tb$ et $xTa = b \Leftrightarrow x = bTa'$.

تمرين 1

① نعتبر الدالة f_1 المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{\sqrt{2x + 5} - 3} ; x \neq 2 \\ f_1(2) = 36 \end{cases}$$

حدد D_{f_1} ثم ادرس إتصال f_1 في النقطة 2.

② نعتبر الدالة f_5 المعرفة بما يلي :

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} ; x \neq 0 \\ a ; x = 0 \end{cases}$$

أوجد قيمة a التي من أجلها تكون الدالة f_5 متصلة على $\mathbb{R}$.

③ نعتبر الدالة f_2 المعرفة بما يلي :

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} ; x > 3 \\ \frac{2x^2 - 5x - 3}{3-x} + \frac{29}{4} ; x < 3 \\ \frac{1}{4} ; x = 3 \end{cases}$$

حدد D_{f_2} ثم ادرس إتصال f في النقطة 3.

④ نعتبر الدالة f_3 المعرفة بما يلي :

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi}{1+x})}{\pi x} ; x > 0 \\ \tan(x)E(\frac{1}{x}) ; x < 0 \\ 1 ; x = 0 \end{cases}$$

بين أن f_3 دالة متصلة في 0.

⑤ نعتبر الدالة f_4 المعرفة بما يلي :

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{(3-x^2)^2 - a}{x-2} ; x < 2 \\ \frac{3x+b}{4} ; x \geq 2 \end{cases}$$

حدد a و b علما أن الدالة f_4 متصلة في 2.

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - \cos(x)}{x} ; si x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{1-x}}{x+2} ; si x \leq 0 \end{cases}$$

① حدد D_f

② بين أن f متصلة في $x_0 = 0$

③ (a) بين أن $\forall x \in]0, +\infty[: |f(x)| \leq \frac{3}{x}$

(b) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

تمرين 3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$

بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^4 + 4} - ax^2 - b + \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} ; si x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

أوجد a و b بحيث f تكون متصلة في 0 و أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$$

تمرين 4

لتكن الدالة العددية المعرفة

بما يلي :

$$f(x) = (x-2) \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

- بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في 2.

تمرين 5

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب

:

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

❶ ادرس إتصال f في 1 و في $\sqrt{2}$.

❷ ليكن $k \in \mathbb{Z}$ ، بين أن f دالة متصلة في k .

❸ هل f متصلة على $\mathbb{R}$ ؟

❹ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

تمرين 6

أوجد صورة المجال I بالدالة f

في كي حالة من الحالات التالية :

❶ $f(x) = \sqrt{x+1}$, $I =]0, +\infty[$

❷ $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $I = [-2, 1[$

❸ $f(x) = x + \sin x$, $I = \mathbb{R}$

تمرين 7

لتكن f معرفة و متصلة على

المجال $[0, 1]$ بحيث $1 < f(0) + f(1) < 2$.

❶ بين أن الدالة $u : x \mapsto f(1-x)$ متصلة على $[0, 1]$

❷ أثبت أن $f(1-\alpha) + f(\alpha) = 1 + \sqrt{\alpha} : \exists \alpha \in]0, 1[$

تمرين 8

❶ بين أن المعادلة

$x^n + x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n بحيث $0 < \alpha_n < 1$

❷ أدرس رتبة المتتالية (α_n) .

تمرين 9

❶ بين أن المعادلة

$x^3 + 5x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $\mathbb{R}$ و أن $0 < \alpha < 1$.

❷ بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ المعادلة $x^3 + 5x = 1 + \frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا α_n من $\mathbb{R}$.

(a) بين أن $\alpha < \alpha_n : \forall n \geq 1$.

(b) قارن بين α_n و α_{n+1} .

تمرين 10

❶ بين أن المعادلة

$2x^3 + 5x - 4 = 0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ نرمز له ب α .

❷ تحقق من أن $0 < \alpha < 1$.

❸ باستعمال طريقة التفرع الثنائي او جد تقريبا ل α ذو السعة 10^{-2} .

تمرين 11

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و

المتراجحات التالية

❶ $\sqrt[3]{x^2 + 8} - 2 = x$

$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2} \quad ❷$$

$$2x\sqrt{x} - 3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}} = 20 \quad ❸$$

$$(x-2)^3 \geq x \quad ❹$$

$$x^3 < 8 \quad ❺$$

$$\arctan(3x) = \frac{\pi}{8} \quad ❻$$

$$\arctan(x^2 - x) = \frac{3\pi}{4} \quad ❼$$

$$\arctan(\tan x) = \frac{\pi}{5} \quad ❽$$

تمرين 12

بسط ما يلي :

$$A = \arctan\left(\tan\left(\frac{43\pi}{17}\right)\right)$$

$$B = \arctan\left(\tan\left(-\frac{2012\pi}{6}\right)\right)$$

$$C = \tan(\arctan(2023))$$

$$D = \tan\left(\arctan\frac{2}{3} - \arctan\frac{7}{3}\right)$$

أحسب النهايات التالية :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+56} - 4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \sqrt[12]{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-x} - \sqrt[3]{x^3+6x-7}}{x-1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x^2-x} - \sqrt[3]{x^3+6x-7}}{x-1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{\arctan x}}{\arctan(\sqrt[3]{x^4+x^2})}$$

تمرين 13

(١). ا. بين أن

$$\forall t > 0 : \arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$$

$$ب. بين أن : \arctan 5 + \arctan \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$ج. احسب \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) - \frac{\pi}{2}}{x}$$

ب. استنتج أنه $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$.

تمرين 16

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} :$$

(١). بين أن الدالة f متصلة على $]0, +\infty[$ ثم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ أحسب}$$

(٢). بين أن $\forall x \in]0, +\infty[$ أن

$$f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \text{ ثم أعط جدول تغيراتها.}$$

(٣). ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 3$

بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلين بالضبط a_n و b_n بحيث $0 < a_n < 1 < b_n$

(٤). بين أن $\forall n \geq 3 : a_{n+1} < a_n$

(٥). بين أن $\forall n \geq 3 : \frac{1}{n^2} < a_n < \frac{4}{n^2}$

تمرين 17

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \arctan x + 2x - 1$$

(١). بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

(٢). بين أن المعادلة $f^{-1}(x) = x$ تقبل حلا

وحيدا $\alpha \in \mathbb{R}$ و أن $0 < \alpha < 1$

(٣). أدرس إشارة الفرق $f(x) - x$ على $\mathbb{R}$.

تمرين 18

نعتبر الدالة f المعرفة ب :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x}.$$

(١). حدد D_f ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(٢). بين أن f دالة متصلة على D_f ثم أحسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - f(x))$$

(٣). بين أن f تقابل من D_f نحو مجال J يتم

تحديده.

(٤). حدد f^{-1} .

$$(٢). \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(\sqrt[3]{x} - x)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(٣). \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{-x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x^2}}$$

$$(٤). \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة التالية } \arctan x + \arctan 3x = -\frac{\pi}{3}$$

تمرين 14

نعتبر الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x-2} ; x \geq 3 \\ x - 1 + \sqrt[3]{3-x} ; x < 3 \end{cases}$$

(١). حدد D_f

(٢). أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(٣). ادرس اتصال الدالة f على D_f .

(٤). ارس رتبة الدالة f على $I = [3, +\infty[$

(٥). لتكن g قصور الدالة f على I .

١. أثبت أن الدالة g تقبل دالة عكسية

معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب. حدد $g^{-1}(x)$ بدلالة x لكل $x \in J$

تمرين 15

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a < b$

و نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} - \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$$

(١). بين أن f دالة متصلة على $]a, b[$.

(٢). نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \arctan(f(x)) ; x \in]a, b[\\ g(a) = -\frac{\pi}{2} \\ g(b) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

١. بين أن g متصلة على $[a, b]$

تمرين 19

نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]0, +\infty[$ ب :

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{\arctan x}.$$

(١). احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(٢). ا. بين أن f دالة تزايدية على I .

ب. بين أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ج. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 20

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$ ب : $f(x) = \tan 2x - \frac{1}{x}$.

(١). بين أن f تقابل من $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$ نحو $\mathbb{R}$.

(٢). ا. بين أن $\tan 2\alpha = \frac{1}{\alpha} : \exists ! \alpha \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$.

ب. بين أن $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

(٣). ا. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[) \frac{1}{n} \Leftrightarrow nx \tan(2x) = x + n$.

ب. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists ! x_n \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[) nx_n \tan(2x_n) = x_n + n$.

ج. بين أن $\alpha < x_n : (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

د. بين أن $x_{n+1} < x_n : (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

تمرين 21

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة f_n المعرفة ب : $f_n(x) = \sqrt[n]{x} - 1 + nx$.

(١). بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n بحيث $0 < \alpha_n < 1$.

(٢). ا. بين أن

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \sqrt[n+1]{\alpha_n} (1 - \sqrt[n+1]{\alpha_n}) + \alpha_n$$

ب. استنتج أن $\alpha_{n+1} < \alpha_n : \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(٣). بين أن $0 < \alpha_n < \frac{1}{n} : \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(٤). بين أن

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < n\alpha_n < 1 : \forall n \in \mathbb{N}^*$$

تمرين 22

لتكن f الدالة العددية المعرفة

بما يلي $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ مع $(n \in \mathbb{N} - \{1\})$

١. بين أن الدالة f تناقصية على المجال $\left[0, \frac{2n}{n+1}\right]$

٢. استنتج أن : $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$

٣. بين أن :

$$\exists \alpha \in \left[\frac{2n}{n+1}, 2\right], f(\alpha) = 0$$

٤. تحقق أن $\alpha^n = \frac{1}{2 - \alpha}$

تمرين 23

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$

بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\sin(2x))}{x^2} ; x > 0 \\ \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} ; x \leq 0 \end{cases}$$

١. ادرس اتصال الدالة f في 0.

٢. بين أن :

$$0 \leq \frac{1 - \cos(\sin(2x))}{x^2} \leq \frac{2}{x^2} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

٣. استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

٤. لتكن g قصور الدالة f على $I =]-\infty, 0]$

(a) بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.

$$g^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}} \quad (\forall x \in J)$$

(c) بين أن المعادلة $g(x) = \sqrt{2}$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right[$

٥. استنتج أن $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}$

تمرين 1

لتكن (u_n) المتتالية العددية

المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

① بين أن $u_n > 1 : \forall n \in \mathbb{N}$.② بين أن (u_n) متتالية تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.③ لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.(a) احسب v_0 ثم بين أن $v_{n+1} - v_n = -1$ لكل n من $\mathbb{N}$.(b) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا : $v_n = -\frac{n}{n+2}$
 $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ (c) استنتج نهاية u_n .

تمرين 2

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و لكل n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

① بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n > 1$.② (a) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$$

(b) حدد رتبة المتتالية (u_n) .(c) استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة محددا نهايتها.

تمرين 3

ليكن n عدد صحيح طبيعي، نضع: $S = a_0 + a_1 + \dots + a_{20}$, $a_n = 2^n + 3$. أثبتأن $(S - 62)2^{-21} = 1$.

تمرين 4

لتكن (x_n) و (y_n) متتاليتين

معرفتین بما يلي :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 4y_k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}$$

نعتبر أيضا متتاليتين مساعدتين (t_n) و (z_n) معرفتین كما يلي $z_k = x_k + y_k$ و $t_k = 2x_k - y_k$.① بين أن المتتاليتين (z_n) و (t_n) هندسيتين.② اعط تعبير z_k و t_k بدلالة k ثم x_k و y_k بدلالة k .

تمرين 5

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث :

$$u_{n+1} = 2u_n + 5^n$$

$$x_n = \frac{u_n}{5^n}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ نضع}$$

① تحقق من أن $x_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$.② استنتج تعبير x_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n .

تمرين 6

ليكن a عدد حقيقي بحيث $a \geq 2$ ، نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - a}{2u_n - a - 1} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

① نفترض أن $a = 2$ و نضع $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ بين أن (v_n) متتالية حسابية ثم اعط u_n بدلالة n .② نفترض أن $a > 2$ و نضع $w_n = \frac{2u_n - a}{2u_n - 2}$ ، بينأن (w_n) متتالية هندسية ثم اعط u_n بدلالة n .

تمرين 7

احسب نهاية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية

:

$$u_n = \frac{3n + 5\sqrt{2}}{n + 4} \quad ①$$

$$u_n = \frac{2n^2 - 3n + 11}{-4n^3 + n} \quad ②$$

$$u_n = -2n^2 + 3n\sqrt{n} + 5n - 7 \quad ③$$

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \arctan u_n \\ u_0 = \sqrt{3} \end{cases}$$

- ① بين أن $u_n > 1 : \forall n \in \mathbb{N}$
- ② ادرس رتبة المتتالية (u_n) .
- ③ بين أن $u_n \geq n\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} : \forall n \in \mathbb{N}$ ثم استنتج أن المتتالية غير مكبورة.

تمرين 12

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n \sqrt{2}}{\sqrt{u_n + 1}} \\ u_0 \geq 0 \end{cases}$$

- ① بين أن $u_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$
- ② حدد قيمة u_0 التي من أجلها تكون المتتالية ثابتة.
- ③ نفترض أن $u_0 \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ أثبت الاستلزامات التالية :

$$u_0 > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$$

$$0 < u_0 < 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$$

- (b) ادرس حسب قيم u_0 رتبة المتتالية u_n .
- ④ استنتج أنه لكل u_0 من $\mathbb{R}^+$ المتتالية (u_n) متقاربة.

تمرين 13

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} := \frac{1}{8}(1 + \sqrt[3]{u_n})^3 \end{cases}$$

- ① احسب u_1 و u_2 .
- ② اثبت أن : $0 \leq u_n \leq 1 : \forall n \in \mathbb{N}$.
- ③ بين أن u_n متتالية تزايدية ثم استنتج أن u_n متقاربة.

$$u_n = 3^n - 5^{n+2} \quad ④$$

$$u_n = \frac{3^n - 5^{n+1}}{3^n + 2 \cdot 5^n} \quad ⑤$$

$$u_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n\sqrt{n^2 - 1} \quad ⑥$$

تمرين 8

- ① أوجد قيم $n \in \mathbb{N}$ التي من أجلها تكون $2n^2 \geq (n+1)^2$
- ② بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n > 3$ $2^n \geq n^2$
- ③ استنتج نهاية 2^n $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$.

تمرين 9

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

① بين أن $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n}{n + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n + 1}$$

- ② ادرس تقارب المتتاليتين $v_n = \frac{n}{n + \sqrt{n}}$ و $w_n = \frac{n}{n + 1}$.
- ③ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة محددًا نهايتها.

تمرين 10

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt[3]{u_n} \\ u_0 = 8 \end{cases}$$

- ① بين أن $u_n > 1 : \forall n \in \mathbb{N}$
- ② حدد رتبة المتتالية (u_n) .
- ③ بين أن (u_n) متتالية متقاربة محددًا نهايتها.

تمرين 11

④ نضع $\forall n \in \mathbb{N} \ v_n = \sqrt[3]{u_n} - 1$

(a) بين أن v_n متتالية هندسية.

(b) اكتب u_n بدلالة n ثم احسب نهايتها.

(c) اعط S_n بدلالة n بحيث :

$$S_n = \sqrt[3]{u_0} + \sqrt[3]{u_1} + \dots + \sqrt[3]{u_{n+1}}$$

تمرين 14

يعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} := \sqrt{\frac{1 + (u_n)^2}{n}} \end{cases}$$

① بين أن $0 < u_n \leq 1 : \forall n \geq 2$

② اثبت أن $(u_n)^2 \geq \frac{1}{n-1} : \forall n \geq 2$

③ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية ثم مقاربة .

④ احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 15

ليكن a و b عددين حقيقيين $0 < a < b$

نعرف المتتاليتين (u_n) و (v_n) بما يلي :

$$\begin{cases} v_{n+1} := \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_0 = b \end{cases} \quad \begin{cases} u_{n+1} := \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ u_0 = a \end{cases}$$

① بين أن $0 < u_n < v_n : \forall n \in \mathbb{N}$

② اثبت أن المتتالية (u_n) تزايدية و أن المتتالية (v_n) تناقصية.

③ بين أن $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) : \forall n \in \mathbb{N}$

ثم أن $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$

④ استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$

⑤ استنتج أن المتتاليتين متقاربتين.

⑥ اثبت أن المتتالية $(u_n v_n)$ ثابتة.

⑦ استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

تمرين 16

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I = [0, 2]$ بما

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 6x} : \text{يلي}$$

① ادرس تغيرات الدالة f ثم حدد $f(I)$.

② نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي $(\forall n \in \mathbb{N}^*) :$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} := \frac{1}{2} \sqrt{v_n^2 + 6v_n} \end{cases}$$

(a) بين أن $0 < v_n < 2 : \forall n \in \mathbb{N}^*$

(b) اثبت أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية.

(c) استنتج أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

تمرين 17

① بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq 2$

المعادلة $x^{n+1} - 2x + 1 = 0$: (E_n) تقبل حلا

وحيدا $x_n \in]0, 1[$

② نعتبر المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$.

(a) بين أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$ تزايدية.

(b) بين أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$ متقاربة و أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$$

تمرين 18

لكل عدد صحيح طبيعي n نعتبر الدالة العددية f_n

معرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f_n = x^n + 9x^2 - 4$

① بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

على $]0, +\infty[$ نرمز له بـ α_n .

② احسب α_1 .

③ بين أن $0 < \alpha_n < \frac{2}{3} : (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

④ (a) بين أن $f_{n+1}(x) < f_n(x) : \forall x \in]0, 1[$

(b) استنتج أن (α_n) تزايدية.

(c) بين أن (α_n) متقاربة محددا نهايتها.

⑤ لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $\beta_n = \frac{2}{3} - \alpha_n$ ت

$$S_n = \sum_{k=1}^n \beta_k$$

(a) بين أن $0 < \beta_n < \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n : (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

(b) بين أن $0 < S_n < \frac{1}{3} : (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

(c) استنتج ان المتتالية (S_n) متقاربة.

b . بين أن (a_n) ت (b_n) متحذيتان محددان نهايتهما تامة مشتركة .

$$c. \text{ اثبت أن } \forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{p^k} \text{ مع}$$

$$c_{n+1} \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

تمارين 20

لتكن (a_n) متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

① بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_n \in \mathbb{N}^*$ ثم ادرس رقابة (a_n) .

② بين أن $a_{n+1} - a_n \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ثم استنتج أن $a_n \geq n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ محددًا $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n$.

③ بين أن $a_n \wedge a_{n+1} = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

④ ليكن l الحل الوحيد الموجب للمعادلة $x = 1 + \frac{1}{x}$

$$b_n = a_{n+1} - la_n. \text{ نضع } (l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$$

(a) بين أن (b_n) متتالية هندسية

$$(b) \text{ استنتج أن } b_n = \left(-\frac{1}{l}\right)^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - l = \frac{1}{a_n} \left(-\frac{1}{l}\right)^{n+1} \text{ تحقق من أن}$$

ثم استنتج أن المتتالية $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ متقاربة محددًا نهايتها.

① ليكن x عدد حقيقي، بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$$

② نعتبر المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$$\forall n \geq 0, v_n = u_n + \frac{1}{5^n}, u_n = \frac{E(5^n x)}{5^n}$$

a. احسب u_0 و v_0 ثم بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n, v_n) \in \mathbb{Q}^2$$

b. بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq x < v_n$

c. أثبت أن المتتاليتين متحذيتان ثم احسب نهايتهما المشتركة.

d. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بما يلي :

$$\forall n \geq 1, w_n = 5^n (u_n - u_{n-1}), w_0 = u_0$$

بين أن $\forall n \geq 1, 0 \leq w_n < 5$

$$\lim_n \sum_{k=0}^n \frac{w_k}{5^k} = x$$

③ ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \geq 2$. نعتبر المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = p^n (a_n - a_{n-1})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n + \frac{1}{p^n}, a_n = \frac{E(p^n x)}{p^n}$$

a. بين أن $\forall n \geq 0, a_n \leq x \leq b_n$

تمرين 1

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(1 - \sqrt[3]{x^2}) & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x^3 - x} & x > 1 \end{cases}$$

① حدد D_f ثم أثبت أن f متصلة على D_f .

② ادرس قابلية اشتقاق f في 1 و على يمين 0 ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها.

③ احسب $f'(x)$ على $]0, 1[$ و على $]1, +\infty[$.

تمرين 2

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \arctan(x \sqrt[3]{|x|})$$

① حدد D_f ثم ادرس زوجية f .

② ادرس قابلية اشتقاق f في 0 ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

③ احسب $f'(x)$ على $]0, +\infty[$.

تمرين 3

① بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا :

$$\frac{1}{(n+1)^2 + 1} \leq \arctan(n+1) - \arctan n \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

② نضع $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 1}$ بين أن :

$$(\forall n \geq 0) S_{n+1} - 1 \leq \arctan(n+1) \leq S_n$$

(b) استنتج تأطيرا لـ S_n .

تمرين 4

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x) = 2 \arctan\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

① اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق $[1, 2]$ و أن $(\forall x \in [1, 2]) |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

② اثبت أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α على $[1, 2]$.

③ نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} := f(u_n) \end{cases}$$

(a) بين أن : $1 \leq u_n \leq 2$

(b) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

(c) استنتج أن (u_n) متقاربة محددات نهايتها.

تمرين 5

ليكن $r \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$

① باستعمال $T.A.F$ بين أن $(\forall x > 0)$:

$$\frac{1-r}{(1+x)^r} \leq (1+x)^{1-r} - x^{1-r} \leq \frac{1-r}{x^r}$$

② استنتج أن : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r}$

تمرين 6

① بين أن المعادلة $x^3 - 6x^2 + 12x - 11 = 0$ تقبل

حلا وحيدا α من $]1, 4[$

② نضع $g(x) = \sqrt[3]{6x^2 - 12x + 11}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).

(a) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية $g(x) = x$.

(b) حدد $g'(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)، ثم استنتج $g([1, +\infty[)$.

③ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} := g(u_n) \end{cases}$$

(a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in [1, +\infty[$.

(b) ادرس رتبة (u_n) .

(c) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 4$.

(d) استنتج أن (u_n) متقاربة محددات نهايتها.

تمرين 7

لتكن f الدالة العددية المعرفة

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$$

بما يلي :

① ادرس تغيرات f .

② ادرس الفروع الانهائية f .

③ انشئ (C_f) .

④ لتكن g قصور f على المجال $I = [1, +\infty[$.

(a) بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.

(b) حدد $g^{-1}(x)$ ($\forall x \in J$)

(c) في نفس المعلم أنشئ $\mathcal{C}_{g^{-1}}$.

⑤ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} := f(u_n) \end{cases}$$

(a) بين أن $u_n \in [0, 1]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(b) اثبت أن $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$

(c) بين أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

تمرين 8

نعتبر الدالة العددية f المعرفة

$$h(x) = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{x^2})^3} \quad \text{بما يلي :}$$

① بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - 8}{x} = -\infty$

② اثبت أن h تقابل من $[0, 8]$ نحو $[0, 8]$.

③ (a) بين أن المستقيم $x = 0$: (Δ) محور

تماثل لـ $\mathcal{C}_h$.

(b) حدد تعبير $h^{-1}(x)$.

(c) احسب $\lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{h(x)}{x - 8}$

(d) انشئ في م.م $\mathcal{C}_h$.

④ نعتبر النقطتين $A(8, 0)$ و $B(0, 8)$ و الدالة g

المعرفة بما يلي $g(x) = h(x) + x - 8$.

(a) بين أن : $g'(\alpha) = 0$: $(\exists \alpha \in]0, 8[)$.

(b) أثبت أن منحنى h يقبل في $M_0(\alpha, h(\alpha))$

مماسا مواز لـ (AB) ثم حدد α .

⑤ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_0 \in]\alpha, 8[\\ u_{n+1} := u_n - \frac{h(u_n)}{h'(u_n)} \end{cases}$$

(a) بين أن : $\alpha < u_n < 8$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

(b) ادرس رتبة (u_n) .

(c) استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

تمرين 9

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) ; & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{\arctan x - x} ; & x < 0 \end{cases}$$

① (a) بين أن $\arctan x - x > 0$: $(\forall x < 0)$.

(b) استنتج أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

② اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 ثم

أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

③ (a) بين أن $(\forall x < 0)$:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} < \arctan x < x - \frac{x^3}{3}$$

(b) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arctan x - x}{x^3}$.

(c) ادرس قابلية اشتقاق f على يسار 0 ثم أول

هندسيا النتيجة المحصل عليها.

④ (a) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(b) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

⑤ (a) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x}{x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(b) بين أن $(\forall x > 0)$: $f(x) - (x - 1) =$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} \left(\frac{\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x+1}}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2} \right) + \frac{1}{x+1}$$

(c) استنتج طبيعة الفرع النهائي بجوار $+\infty$.

⑥ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ :

$$g(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$$

(a) ادرس تغيرات g ثم استنتج أن :

$$0 < g(x) < \frac{\pi}{2} ; (\forall x > 0)$$

(b) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و أن

$$(\forall x > 0) f'(x) = xg(x)$$

(c) بين أن f قابلة للاشتقاق على $] -\infty, 0[$ ثم

احسب $\forall x \in] -\infty, 0[f'(x)$.

(d) اعط جدول تغيرات الدالة f .

(e) انشئ $(\mathcal{C}_f)$.

⑦ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ u_{n+1} := f\left(\frac{u_n}{2}\right) \end{cases} :$$

(a) بين أن : $0 < u_n < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(b) بين أن : $0 < f'(x) < \frac{\pi}{2}$: $(\forall x \in]0, 1[)$.

(c) اثبت أن المعادلة $f\left(\frac{x}{2}\right) = x$ تقبل حلا وحيدا

α من $]0, 1[$.

(d) بين أن :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4} |u_n - \alpha| : (\forall n \in \mathbb{N})$$

(e) استنتج أن (u_n) متقاربة مع حساب $\lim u_n$.

Exercice 1

I) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- ① $\ln[(x-1)(2x+3)] = \ln 2$
- ② $(\ln x)^2 + 2 \ln x - 5 = 0$
- ③ $2 \ln(2x+1) - 3 \ln(1-x) = 0$
- ④ $\ln|3x-2| + \ln|x+1| = \ln 6$

II) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivants :

- ① $\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right) < 0$.
- ② $(\ln x)^2 + 2 \ln x - 5 \geq 0$.

Exercice 2

Déterminer D_f puis calculer la dérivées des fonctions suivantes :

- ① $f_1(x) = \ln(2x^2 + x - 1)$
- ② $f_2(x) = \frac{5}{3 - \ln(x-2)}$
- ③ $f_3(x) = \sqrt{\ln(-x-1) + 5}$
- ④ $f_4(x) = \ln(\ln(x+1))$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

- ① $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$
- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$
- ③ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$
- ④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3)}{x + 2}$
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
- ⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\cos x}{\tan x}\right)$
- ⑦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln x - x \ln(x+1)$

Exercice 4

Soit u la fonction définie par :

$$u(x) = 2x + \ln x - 2$$

① Déterminer D_u puis montrer que :

$$\begin{cases} u(x) \geq 0 ; & 1 < x \\ u(x) < 0 ; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

② On pose dans $[0, +\infty[$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x \ln x - 3x ; & x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

(a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite du point 0.

(b) Étudier les branches infinies du (C_f) .

(c) Déterminer $f'(x)$ puis donner le tableau de variation,

(d) Prouver que $(C_f) \cap (OX) = \{A, B\}$ où le point A est d'abscisse α tel que $2 < \alpha < 3$.

Exercice 5

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par :

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

① a- Étudier les variations de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

b- Dédire que $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

② a- Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: \ln(x) \leq x - 1$.

b- Dédire que $\forall x \in]0, +\infty[: \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.

③ a- En utilisant les questions (① -b) et (② -b) montrer que $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq U_n \leq \ln 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b- Prouver que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6

I) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\textcircled{1} \log(x+3) + \log(x-2) = 2$$

$$\textcircled{2} \log_2(x-1) = 3$$

$$\textcircled{3} \log_2(x) = \log_x(2)$$

$$\textcircled{4} \log(x) > 5 \quad \textcircled{5} \log_{\frac{1}{2}}(x) \cdot \log_{\frac{1}{4}}(x) = 8$$

$$\textcircled{6} \log_3(x-1) - \log_9(x+3) = 1$$

Exercice 7

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\textcircled{1} f_1(x) = x \cdot 2^{-x} \quad \textcircled{2} f_2(x) = 4^x - 2^{x+2}$$

Exercice 8

I) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\textcircled{1} e^{x+1} + 5e^x = 1 \quad \textcircled{2} e^{2x} + 2e^x + 2 = 0$$

II) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\textcircled{1} e^{2x+1} < e^{-x^2+4} \quad \textcircled{2} e^x + 4e^{-x} \geq 2$$

$$\textcircled{3} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} < \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$$

Exercice 9

Déterminer D_f puis calculer la

dérivées des fonctions suivantes :

- ① $f_1(x) = \ln(1+e^x)$ ② $f_2(x) = (\sin x + \cos x)e^x$
 ③ $f_3(x) = e^{\sqrt{2x-1}}$ ④ $f_4(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{2e^{2x}+3}}$
 ⑤ $\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{|e^{2x}-1|}\right)$

Exercice 10

Calculer les limites suivantes :

- ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^{3x} + e^x$ ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x+3}{x-5}}$
 ③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-e^{-x}}{x}$ ④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - \sqrt{1+x})$
 ⑤ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e$

Exercice 11

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (\sqrt{x^2+1})e^x$$

- ① Déterminer D_f et calculer les limites de f aux bornes de D_f .
 ② Donner le tableau de variation de f .
 ③ Étudier les branches infinies de (C_f) .
 ④ Donner l'équation de la tangente (T) au point A d'abscisse 0.
 ⑤ Tracer (T) et (C_f) .

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) :$

$$u_n = e^{1-\frac{n}{2}}.$$

- ① Montrer que (u_n) est une suite géométrique, on déterminant sa raison q et u_0 .
 ② On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique, on déterminant le raison r et v_0 .
 ③ On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $T_n = u_0 \cdot u_1 \dots u_n$. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

- ① (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis donner des interprétations géométriques.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f .

(c) Calculer $f''(x)$ puis montrer que l'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions 1 et β où $-\frac{1}{5} < \beta < 0$.

(d) Déduire un point d'inflexion de la courbe (C_f) .

(e) Tracer la courbe (C_f) .

② (a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$ et soit g sa bijection réciproque.

(b) Tracer (C_g) .

(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(d) Montrer que $(\forall n \geq 1) (\exists! \alpha_n < 0) ; g(\frac{1}{n}) = \alpha_n$.

(e) Calculer α_1 et étudier la monotonie de $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.

(f) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ n'est pas minorée puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e + \frac{1}{n}$ et on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = e^{\sqrt{x}} - u_n \sqrt{x}$$

① Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

② (a) Montrer que $(\forall x > 0) :$

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1}{x} + \frac{1 - u_n}{\sqrt{x}}$$

(b) Étudier la dérivabilité de f_n à droite de 0 puis interpréter le résultat.

③ Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - u_n) ; (\forall x > 0)$

④ Montrer que f_n est strictement croissante sur $](\ln u_n)^2, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, (\ln u_n)^2[$.

⑤ Donner le tableau de variation de f_n .

⑥ (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exac-

tement deux solutions a_n et b_n dans $]0, +\infty[$ et que $0 < a_n < 1 < (\ln u_n)^2 < b_n$.

(b) Montrer que la suite (a_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente vers l .

(c) Montrer que $0 < l \leq 1$.

⑦ Tracer la courbe (C_1) de la fonction f_1 .

Exercice 15

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie 1

Soit g_n la fonction définie par :

$$g_n(x) = n \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}.$$

① Étudier les variations de $g_n(x)$ sur $] -1, +\infty[$.

② Déduire le signe de $g_n(x)$ sur $] -1, +\infty[$. (Remarquer que $g_n(0) = 0$).

Partie 2

On considère la fonction numérique définie sur $] -1, +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n \ln(x+1)$ et (C_n) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prend $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$.

① Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$. (Discuter suivant la parité de n)

② Étudier les branches infinies de (C_n) .

③ a- Montrer que $\forall x \in] -1, +\infty[$ $f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$.

b- Donner le tableau de variation de f_n (pour n pair et n impair).

④ Tracer (C_2) et (C_3) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

⑤ Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique U_n dans $[1, +\infty[$.

⑥ a- Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ pour $[1, +\infty[$.

b- Déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

c- Déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

⑦ a- Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ et calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1 + \frac{1}{n})$.

b- Déduire que : $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) f_n(1 + \frac{1}{n}) > 1$ (remarquer que $e \ln 2 > 1$).

c- Déduire que $\forall n \geq n_0$ $U_n \leq 1 + \frac{1}{n}$.

d- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

Exercice 16

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} ; x > -1, x \neq 0 \\ (\ln|1+x|)(\ln|x|) ; x < -1 \\ 0 ; x = -1 \\ 1 ; x = 0 \end{cases}$$

Partie 1

① (a) Étudier la continuité de g en 0 et en -1.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

(c) Montrer que $\forall x < -1$:

$$g(x) = (\ln|x|)^2 \left(1 + \frac{\ln|1 + \frac{1}{x}|}{\ln|x|} \right)$$

(d) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ puis étudier la nature du branchement infini au voisinage de $-\infty$.

② Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

③ (a) Montrer que $(\forall x > -\frac{1}{2})$:

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq 2|x|^3$$

(b) Étudier la dérivabilité de g en 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

④ On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(x+1)$$

(a) Étudier les variations de f est montrer que $(\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[) : f(x) < 0$.

(b) Montrer que la fonction g est dérivable sur $] -1, 0[,]0, +\infty[$ et de plus :

$$g'(x) = \frac{f(x)}{x^2} \quad (\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[)$$

⑤ On considère la fonction u définie sur $] -\infty, -1[$ par : $u(x) = (1+x) \ln |1+x| + x \ln |x|$

(a) Montrer que $(\forall x \in]-\infty, -1[) :$

$$u'(x) = \ln |1+x| + \ln |x| + 2.$$

(b) Montrer que $(\forall x \in]-\infty, -1[) : u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ et $u'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \alpha$ avec $\alpha = \frac{-1 - \sqrt{1+4e^{-2}}}{2}$.

(c) Donner le tableau de variation de u et montrer que $(\exists \beta < \alpha) : u(\beta) = 0$ puis déduire le signe de $u(x)$.

(d) Montrer que $(\forall x \in]-\infty, -1[) :$

$$g'(x) = \frac{u(x)}{x(x+1)}$$

⑥ (a) Donner le tableau de variation de g .

(b) Construire la courbe (C_g) .

(Hint : $\beta = -1.2$ et $f(\beta) = -0.4$)

Partie 2

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$

et soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} := h(u_n) \end{cases}$$

(a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) = g(e^x)$.

(b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq g(x) \leq 1$. (Hint : utiliser **Partie 1** ⑥(a))

(c) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une seule solution α dans $[0, 1]$.

(d) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.

② (a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}) : h'(x) = e^{-x} f(e^x)$.

(b) Montrer que $(\forall x \in [0, 1]) |h'(x)| \leq |f(e)|$.

③ (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq |f(e)| |u_n - \alpha|$.

(b) Montrer que : $-1 < f(e) < 0$.

(c) Montrer que (u_n) est décroissante puis calculer sa limite.

Partie 3

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivante :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} := \frac{4\sqrt{a_n}}{4 - 2^{1-n}} \end{cases}$$

① Montrer que $(\forall n \geq 1) :$

$$2^{n+1} \ln a_{n+1} = 2^n \ln a_n + g(-2^{-(n+1)})$$

② Montrer que $(\forall n \geq 1) :$

$$2^n \ln a_n = \sum_{k=1}^n g(-2^{-k})$$

③ (a) Montrer que $(\forall x \in [0, 1]) :$

$$x \leq -\ln(1-x) \leq x + \frac{x^2}{2(1-x)}$$

(b) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*) :$

$$1 \leq g(-2^{-k}) \leq 1 + 2^{-k}$$

(c) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) :$

$$1 \leq \frac{2^n \ln a_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Exercice 17 (2021-R)

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty, 1[$ par : $f(x) = \ln(1-x)$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

❶ (a) Montrer que la fonction f est continue sur I

(b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I

(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

(d) Interpréter graphiquement les résultats obtenus

(e) Donner le tableau de variations de f

❷ (a) Montrer que la courbe (C) est concave.

(b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

❸ (a) Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$ On note f^{-1} sa bijection réciproque.

(b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

(c) Vérifier que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$

Partie 1

Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$

❶ Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0, 1[$ tel que : $P_n(x_n) = 1$

❷ Déterminer le réel $\alpha = x_2$ et vérifier que : $0 < \alpha < 1$

❸ (a) Montrer que : pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n) > 1$

(b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \in]0, \alpha]$

(d) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

❹ pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $f_n(x) = f(x) + P_n(x)$

(a) Montrer que : $(\forall x \in I); (\forall n \geq 2) \quad f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x}$

(b) Montrer que : $(\forall x \in [0, \alpha]); (\forall n \geq$

$$2) \quad |f'_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

(c) En déduire que : $(\forall x \in [0, \alpha]); (\forall n \geq$

$$2) \quad |f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

(d) Montrer que : $(\forall n \geq 2) |f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$

(e) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Exercice 18

(2021-N)

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$)

Partie 1

❶ (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

(b) Montrer que la courbe (C_n) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

❷ (a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \quad f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$$

(b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

(c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$

(On distinguera les deux cas : $n = 0$ et $n \geq 1$)

❸ (a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0

(b) Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n)

❹ Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes (C_0) et (C_2) .

Partie 2

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f_0(u_n)$$

❶(a) Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

(b) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); |f_0'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

❷ (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

(b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers α .

Partie 3

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$.

❶ (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$
(On prendra $\frac{2e}{1+e} < 1.47$)

❷(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) > 0$

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

c) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

❸ (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$

$$\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} \left(\frac{2e}{1+e} \right)$$

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, puis montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$$

❹ (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$x_n \leq x_2$$

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n$

Exercice 19 (2020-R)

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, 1]$ par $f(x) = x \ln(2-x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

❶ (a) Montrer que f est dérivable sur I et que :

$$\forall x \in I : f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

(b) Montrer que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur I .

(c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

❷(a) Étudier les variations de f , puis donner son tableau de variations.

(b) Montrer que la courbe (C) est concave.

(c) Montrer que : $(\forall t \in I), (\forall x \in I); f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$

(d) En déduire que : $(\forall x \in I); f(x) \leq x \ln 2$ et $f(x) \leq -x + 1$

❸ Représenter la courbe (C) (On prendra : $\|\vec{i}\| = 2cm$)

Partie 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I = [0, 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(2-x)$$

❶ (a) Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$

(b) Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$

❷ (a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que : $\forall x \in I : f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où : $g_n(x) = n \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$

(b) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I

(c) En déduire que α_n est unique.

❸ On considère la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie.

(a) Montrer que : $\forall n \geq 2; f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$, en déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha_n) = 0$

(b) Montrer que : $\forall n \geq 2$

$g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

(c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

(d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$

Exercice 20 (2020-N)

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in]0; +\infty[); \quad f(x) = x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$)

❶ On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x, x+1]$, montrer que :

$$(P) \quad (\forall x \in]0; +\infty[; \quad \frac{1}{x+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{x}$$

❷ (a) En utilisant la proposition (P), montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0

(b) En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

❸ (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $f'(x) = 3x^2 \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{3(1+x)} \right) \forall x \in]0, +\infty[.$

(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I (On pourra utiliser la proposition (P))

(c) Dresser le tableau de variations de f

❹ Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$
(a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : g'(x) = 2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$, en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution unique notée α ,

puis vérifier que $\alpha \in]1; 2$ (On prendra $\ln 2 = 0.7$ et $\ln \frac{3}{2} = 1.5$)

(c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et α .

❺(a) Représenter graphiquement la courbe (C) . (On précisera la demi-tangente à droite en 0 et la branche parabolique de (C))

(b) Montrer que f est une bijection de I vers I (On note f^{-1} sa bijection réciproque)

Partie 2

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $0 < u_0 < \alpha$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

❶ Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < \alpha$$

❷(a) Montrer que : $g([0; \alpha]) =]0; 1]$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

❸ Déterminer $\lim u_n$.

الآتية :

$$z_1 = 2 + z \quad z_2 = 4i + 2z$$

$$z_3 = iz \quad z_4 = z\bar{z} + i$$

$$z_5 = \frac{1-i}{iz} \quad z_6 = \frac{4}{z}$$

تمرين 4ليكن $z = x + iy$ عدد عقديمع x و y أعداد حقيقية. من أجل $z \neq i$ نضع

$$Z = \frac{z-2}{z-i}$$

① اكتب Z على الشكل الجبري.

② في معلم متعامد ممنظم ، حدد مجموعة النقط

 M ذات اللحق z بحيثأ) Z يكون عدد حقيقي.ب) Z يكون عدد تخيلي صرف.نعتبر النقط الآتية A و B و C ذات اللاحق :

$$z_C = i \quad z_B = -1 - i \quad z_A = -2 - 3i$$

أثبت أن النقط A و B و C مستقيمية.**تمرين 5**نعتبر النقط A و B و C ذات

اللاحق :

$$z_C = -2i, z_B = \sqrt{3} - i, z_A = \sqrt{3} + i$$

① بين أن النقط تنتمي الى دائرة مركزها O .② أثبت أن الرباعي $OABC$ معين.**تمرين 1**اعط الكتابة الجبرية للأعداد
العقدية التالية محددًا الجزء الحقيقي و التخيلي
لها.

$$z_1 = 2 - (i + 1) \quad z_2 = (1 + i)(3 - 4i)$$

$$z_3 = 2i + 3(4 - 2i) \quad z_4 = (\sqrt{3} + i)$$

$$z_5 = (2 - i)^3 \quad z_6 = \frac{2}{i}$$

$$z_7 = \frac{2}{1 - i} \quad z_8 = \frac{2 - i}{2 + 3i}$$

$$z_9 = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + i} \quad z_{10} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1-i}}$$

تمرين 2(I) ليكن $z = x + iy$ مع x و y
أعداد حقيقية. اكتب بدلالة x و y الجزء الحقيقي
و التخيلي لـ :

$$\textcircled{1} z - z^2 \quad \textcircled{2} \frac{2}{z}(z \neq 0) \quad \textcircled{3} \frac{z}{z-1}$$

(II) نضع $z = x + 2 + i(-ix + 2x) + 2i - 5ix$
مع x عدد حقيقي.① اعط الكتابة الجبرية لـ z .② تحت أي شرط على x سيكون z عدد حقيقي؟
تخيلي صرف؟**تمرين 3**

(I) اعط مرافق الأعداد الآتية :

$$z_1 = 3 - i \quad z_2 = i\sqrt{2} - 6$$

$$z_3 = -7i \quad z_4 = 5 + \sqrt{5}$$

(II) ليكن $z \in \mathbb{C}$. اكتب بدلالة $\bar{z}$ مرافق الأعداد

تمرين 6

(I) حدد معيار الاعداد الآتية :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{3} + i & z_2 &= 5i \\ z_3 &= 2 - \sqrt{7} & z_4 &= (2 - i)(5 + 2i) \\ z_5 &= (2 - 3i)^5 & z_6 &= \frac{4}{(3 + i)^2} \\ z_7 &= \frac{z_2}{z_3^2} & z_8 &= z_1^{2017} \\ z_9 &= \frac{4}{4 + 5i} + \frac{1}{(3 + 2i)} \\ z_{10} &= \frac{x + iy}{x - iy} \text{ où } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

(II) ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين بحيث :

$$|z_1| = 4 \quad |z_2| = \sqrt{2}$$

اعط معيار العددين العقديين $\bar{z}_1, \bar{z}_2^4$ و $-\frac{2z_1}{z_2^4}$

تمرين 7

حدد مجموعة النقط M ذات

اللق z بحيث :

$$\begin{aligned} |z - 1 + 2i| &= |z + 1| \quad \textcircled{1} & |z + 1 + 2i| &= 5 \quad \textcircled{1} \\ |z - 1 + 2i| &\geq |z + 1| \quad \textcircled{4} & |z + 1 + 2i| &\leq 5 \quad \textcircled{5} \\ |iz| &= |1 - z| \quad \textcircled{6} & |z - 2 - i| &= |z| \quad \textcircled{5} \end{aligned}$$

تمرين 8

(I) حدد مجموعة النقط M ذات

اللق z بحيث :

$$|i\bar{z} - 2| = |z| \quad \textcircled{2} \quad |\bar{z} - 1 + 3i| = |1 - z| \quad \textcircled{1}$$

(II) أثبت أنه لكل عددين عقديين z, z' لدينا :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(zz') + |z'|^2.$$

تمرين 9

(I) أعط الكتابة المثلثية و

الكتابة الاسية للأعداد العقدية التالية :

$$\begin{aligned} z_1 &= (2 - 2i)(1 - i\sqrt{3}) & z_2 &= \frac{i}{1 - i\sqrt{3}} \\ z_3 &= \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} & z_4 &= \frac{3 - 2i}{2 + 3i} \\ z_5 &= 1 - i \tan\left(\frac{7\pi}{5}\right) & z_6 &= \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

(بي) اكتب العدد العقدي $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ على الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي ثم الشكل الاسي.

① استنتج قيمة $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

تمرين 10

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتي :

$$\begin{aligned} 1) 2\bar{z} &= i - 1 & 2) (3 - 2i)\bar{z} + i &= 0 \\ 3) \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} &= i & 4) \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} &= 2i \\ 5) z^2 &= -1 & 6) z^2 + 2z + 5 &= 0 \\ 7) z^2 - z + 1 &= 0 & 8) z^2 - \sqrt{3}z + 31 &= 0 \\ 9) 4z^2 - 8z + 5 &= 0 & 10) -z^2 + 6z - 10 &= 0 \\ 11) z^5 &= -1 & 12) z^4 &= -6 \\ 13) z^6 &= 1 & 14) z^4 &= 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

تمرين 11

(I) نعتبر العدد العقدي التالي

$$z = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} :$$

① بين أن $|z| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

② تحقق من أن $z = 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

③ (i) باخطاط $\cos^2(\theta)$ ، $\theta \in \mathbb{R}$ بين أن $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$

(ب) بين أن

$$z = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

(ج) بين أن $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ هو الشكل المثلثي لـ z ثم بين أن $z^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 i$

(II) المستوى العقدي منسوب الى معلم م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. نعتبر النقط Ω ت A ذات الحق $\mathcal{R}$ و $w = \sqrt{2}$ و $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و ليكن الدوران ذو المركز Ω و الزاوية $\frac{\pi}{2}$.

① بين أن B هي صورة A بالدوران $\mathcal{R}$ و $b = 2i$

② حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $|z - 2i| = 2$

تمرين 12

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

$$z^2 - 4iz + 5 = 0 \quad ①$$

$$z^2 - 4z \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 4 = 0 \quad ②$$

$$(2+i)z^2 + (1-7i)z - 5 = 0 \quad ③$$

$$z^4 - (3+2i)z^2 + 2(4-3i) = 0 \quad ④$$

تمرين 13

نعتبر المعادلة التالية :

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0.$$

① أثبت أن المعادلة تقبل حلا تخيليا صرفا يجب تحديده.

② بين أنه لكل $z \in \mathbb{C}$ لدينا :

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = (z-i)(z^2 - 2z + 2).$$

③ استنتج جميع حلول المعادلة.

تمرين 14

نضع $z = e^{i\frac{\pi}{11}}$ و $u = z + z^2 + z^3 + \dots + z^9$.

① احسب z^{11} و u .

② استنتج المجموع

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right).$$

تمرين 15

نضع $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ و $u = z + z^2 + z^4$ و

$$v = z^3 + z^5 + z^6$$

① بين أن u و v مترافقان.

② بين أن $u + v = -1$ و $u.v = 2$.

③ بين أن $Im(u) > 0$ ثم احسب u و v .

④ احسب المجموع :

$$S = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

تمرين 16

① أثبت التكافؤ التالي :

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z - i| = |z + i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

② حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث

$$(z\bar{z} - 2z - 3) \in i\mathbb{R}.$$

③ ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \{2, -2\}$ مع $|z| = \sqrt{2}$ ، بين أن

$$\frac{z^2 + 2}{z^2 - 2}$$
 تخيلي صرف.

④ اعط الشكل المثلثي لـ :

$$a = \frac{(i - \sqrt{3})^3(1+i)^6}{(\sqrt{3} + 3i)^6}.$$

⑤ نعتبر العدد العقدي $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ مع $\alpha \in [0, 2\pi]$

حدد معيار و عمدة z .

تمرين 17

نضع : $P(z) = z + \frac{4}{z}$ لكل z من $\mathbb{C}^*$.

① حل في $\mathbb{C}^*$ المعادلة $P(z) = -2$ ، نسمي z_1 و z_2

حليها مع $Im(z_1) > Im(z_2)$.

② (a) اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

$$(b) \text{ استنتج أن } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{20} = \frac{z_1}{z_2}$$

③ المستوى منسوب الى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

(a) اثبت التكافؤ التالي :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : P(z) = \overline{P(z)} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z\bar{z} - 4) = 0.$$

(b) استنتج مجموعة النقط $M(z)$ بحيث

$$P(z) \in \mathbb{R}$$

④ نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على

التوالي z_1 و z_2 و α مع $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

(a) اوجد α بحيث يكون المثلث ABC متساوي

الأضلاع.

(b) حدد لحق النقطة D بحيث يكون الرباعي

$ABCD$ معين.

(c) حدد لحق النقطة E بحيث :

par $\mathcal{R}$.

❶ Vérifier que $z' = -z + 2$ et $z'' = iz + 2$

❷ Supposons que $M \neq O$.

a) Calculer le rapport $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$ et puis déduire la nature du triangle $AM'M''$.

b) Déterminer l'ensemble de point $M(z)$ tels que les points A, Ω, M' et M'' soit cocycliques.

تمرين 20

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application r qui fait associer chaque points $M(z)$ du plan complexe au points $M'(z')$ tels que $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$

❶ Montrer que r est une rotation dont on détermine son centre et son angle.

❷ Considérons les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 3 + 4i$, $b = 7 + i$ et $c = \frac{a}{b}$.

a) Déterminer la forme algébrique et trigonométrique du nombre complexe c .

b) Posons $r(C) = C'$. Donner l'affixe du point C' puis vérifier que $c' = \frac{(2+i)^2}{7+i}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

c) On pose $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$. En fonction de α déterminer l'argument du nombre complexe $2 + i$ et aussi en fonction de β déterminer l'argument du nombre complexe $7 + i$ puis déduire que : $2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{cases} EA = 2EB \\ (\vec{EA}, \vec{EB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

تمرين 18

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$ مع a عدد عقدي غير منعدم.

❷ المستوى العقدي منسوب الى م.م.م. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. نعتبر النقط A و B التي ألقاها على التوالي $z_1 = 1 + ia$ و $z_2 = 1 - ia$.

(a) بين أن النقط O و A و B مستقيمية اذا و فقط اذا كان a تخيلي صرف.

(b) بين أن : $|a| = 1 \Leftrightarrow (OA) \perp (OB)$.

❸ نضع $a = e^{i\theta}$ لكل θ من $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(a) اعط الشكل المثلثي لـ z_1 و z_2 .

(b) حدد قيمة a علما أن المثلث OAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في O .

❹ نأخذ $a = 1 + i$.

(a) حدد صيغة الدوران r ذو المركز O و الذي يحول A الى B .

θ عمدة العدد العقدي $7 + 24i$.

تمرين 19

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la symétrie centrale $\mathcal{S}$ de centre $A(-1)$ et la rotation $\mathcal{R}$ de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $M(z)$ un point dans le plan, $M'(z')$ son image par $\mathcal{S}$ et $M''(z'')$ son image

تمرين 1

(Bac 2021R(4 points))

m est un nombre complexe différent de 2 et de $-i$
Le plan complexe est rapporté à un repère ortho-
normé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'in-
connue z :

$$(E) : z^2 - (m - i)z - im = 0$$

1-a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E)
est $(m + i)^2$

b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

c) Sachant que $m = e^{i\frac{\pi}{8}}$; écrire le nombre $z_1 + z_2$
sous forme exponentielle.

2- On considère les points A, B et M d'affixes
respectifs $2, -i$ et m et soit M' le symétrique de
 M par rapport à l'axe imaginaire.

a) Déterminer en fonction de m l'affixe de M'

b) Déterminer en fonction de m l'affixe du point
 N tel que le quadrilatère $ANM'B$ soit un pa-
rallélogramme.

c) Montrer que les deux droites (AM) et (BM')
sont perpendiculaires si et seulement si $\text{Re}((2 - i)m) = \text{Re}(m^2)$

تمرين 2

(Bac 2021N(4 points))

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls
tel que : $a + b \neq c$

1-a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'in-
connue z

$$(E) : z^2 - (a + b + c)z + c(a + b) = 0$$

b) On suppose dans cette question que : $a = i, b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$.

Écrire les deux solutions de l'équation (E) sous
forme exponentielle.

2- Le plan complexe est rapporté à un repère or-
thonormé $\text{direct}(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les trois
points $A(a), B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non
alignés.

Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui
transforme B en A et $Q(q)$ le centre de la rotation
d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A et $D(d)$
le milieu du segment $[BC]$

a) Montrer que : $2p = b + a + (a - b)i$ et
 $2q = c + a + (c - a)i$

b) Calculer : $\frac{p - d}{q - d}$

c) En déduire la nature du triangle PDQ

3- Soient E le symétrique de B par rapport à P
et F le symétrique de C par rapport à Q et K le
milieu du segment $[EF]$

a) Montrer que l'affixe de K est $k = a + \frac{i}{2}(c - b)$.

b) Montrer que les points K, P, Q et D sont co-
cycliques.

تمرين 3

(Bac 2020R(3,5 points))

1. Soit m un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres com-
plexes $\mathbb{C}$. les deux équations :

$$(E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \quad \text{et}$$

$$(F) : z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0$$

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) 2-a) Montrer
que l'équation (F) admet une solution imaginaire
pure que l'on déterminera.

2-a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F)

On considère les deux points : $A(-1 + im)$ et $B(-1 - im)$

Soient Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' le milieu du segment $[OA]$

La rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, La rotation de centre A' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$ et La rotation de centre B' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme

O en $R(r)$

1-Montrer que : $p = -1 + m, q = \frac{1-i}{2}(-1 - im)$ et $r = \bar{q}$

2-a) Vérifier que : $q - r = -ip$

b) En déduire que : $OP = QR$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.

4 تمرين

(Bac 2020N(3,5 points))

Soit m un nombre complexe non nul. Première partie : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z, (E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E))

2- On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m

a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

b) Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{I\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-I\frac{\pi}{3}}$ On note P le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A , Q le centre de la

rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B et

R le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O

1- Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

2-a) Montrer que l'affixe de P est $p = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$

et que l'affixe de R est $r = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

b) Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3- Montrer que $OQ = PR$ et que les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

5 تمرين

(Bac 2019R(3,5 points))

Soit α un nombre complexe non nul.

I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z : (E_a) : z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

1-a) Vérifier que le discriminant de (E_a) est $\Delta = \alpha^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) .

2- Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda} (\lambda \in \mathbb{R})$, mettre les deux racines de l'équation (E_a) sous la forme exponentielle.

II- On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points Ω, M_1 et M_2 d'affixes respectivement $\alpha, z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1-a) Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$.

b) En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et $OM_1 M_2$ sont équilatéraux.

2-a) Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$.

b) Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et

(OM_1) sont orthogonales.

c) En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.

3- Montrer que pour tout réel θ , le nombre $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

تمارين 6

(Bac 2019N(4 points))

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$)

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1 + i)(1 + m)z + 2im = 0$$

1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E)

2- On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$

b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points suivants :

A le point d'affixe $a = 1 + i$, B le point d'affixe

$b = (1 + i)m$, C le point d'affixe

$c = 1 - i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

1-a) Montrer que l'affixe du point Ω est $w = \frac{(1 - i)(1 - m)}{2}$

b) Calculer $\frac{b - a}{w}$

c) En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$

2- La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

a) Montrer que $\frac{h - a}{b - a}$ est un réel et que $\frac{h}{b - a}$

est un imaginaire pur.

b) En déduire h en fonction de m

تمارين 7

(Bac 2018R(3,5 points))

Pour tout nombre complexe z différent de i on pose : $h(z) = i \left(\frac{z - 2i}{z - i} \right)$.

a) Vérifier que : $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$

2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On désigne par a et b les solutions de l'équation (E) tels que $Re(a) = 1$

Soit z un nombre complexe différent de i de a et de b et soient les points $M(z), M'(h(z)), A(a)$ et $B(b)$.

a) Montrer que $\frac{h(z) - a}{h(z) - b} = \frac{z - a}{z - b}$.

b) En déduire que : $(\vec{M'B}, \vec{M'A}) \equiv \pi + (\vec{MB}, \vec{MA})[2\pi]$.

3) a) Montrer que si les points M, A et B sont alignés alors les points $M; A$ et B et M' sont aussi alignés.

b) Montrer que si les points M, A et B ne sont pas alignés alors les points M, A et B et M' sont Cocycliques.

تمارين 8

(Bac 2018N(3,5 points))

Soit m un nombre complexe .

I- On considère dans l'ensemble complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1- a) Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b) Donner, suivant les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)

2- Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respect et $m' = -im - 1 + i$ Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'

a) Vérifier que Ω est le centre de R

b) Déterminer l'abscisse b de B , où B est le point tel que : $A = R(B)$

2- a) Vérifier que : $m' - a = \frac{w - a}{w - b}(m - b)$

b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques.

c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés Est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon .

تمرین 9

(Bac 2017R(3,5 points))

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit M le point d'abscisse le nombre complexe non nul z et M' le point d'abscisse $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

1) Déterminer le nombre complexe z tel que les deux points M et M' soient confondus.

2) On suppose que le point M est différent des deux points A et B d'abscisses respectifs 1 et -1 .

Montrer que : $\frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^2$.

3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que : Si le point M appartient à (Δ) , alors le point M' appartient à (Δ) .

4) Soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

Montrer que : Si le point M appartient à (Γ) , alors le point M' appartient à (AB) .

تمرین 10

(Bac 2017N(3,5 points))

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

1- Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (2im)^2$.

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

Partie 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On suppose que : $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$ et on pose : $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'abscisses respectifs $1, i, m, z_1$ et z_2 .

1-a) Vérifier que : $z_1 = iz_2 + 1$.

b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre le point Ω d'abscisse $w = \frac{1+i}{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

2-a) Vérifier que : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m - 1}{m - i}$.

b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés alors M appartient au cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

c) Déterminer l'ensemble des points M pour que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques (remarque que : $\frac{z_1 - w}{z_2 - w} = i$).

تمرين 1

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3 - z^2 - (5 + 4i)z + 21 - 12i$

(1) Résoudre l'équation : $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

(2) dans le plan complexe lié au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B, I les points d'affixes respectivement $z_A = 3 + 2i, z_B = -3, z_I = 1 - 2i$.

(a) Calculer $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$ puis en déduire la nature du triangle IAB .

(b) Déterminer l'affixe z_C du point C image du point I par l'homothétie h de centre A et de rapport 2.

(c) Soit $D = \text{bary}\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$ déterminer l'affixe z_D du point D .

(d) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

(3) Déterminer puis construire $(\Gamma) = \{M(z) \in (P) / \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MA} + \vec{MB}\|\}$.

(4) Déterminer puis construire $(C) = \{M(z) \in (P) / \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}\}$.

تمرين 2

Le plan complexe est lié à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) z^3 - (i\sqrt{2})z^2 + (-1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{6} + i\sqrt{2} = 0$.

(1) (a) Montrer que l'équation (E) admet une solution z_0 imaginaire pure qu'on déterminera et que : $(E) \Leftrightarrow (z - z_0)(z^2 - 1 + i\sqrt{3}) = 0$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}(E)$. Notons z_1 et z_2 les deux autres solutions de (E) .

(2) Montrer que les points $M_0(z_0), M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ sont les sommets d'un triangle rectangle et appartiennent au cercle de centre O .

Partie 2

(1)(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 1$

(b) On considère le nombre complexe $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

(c) Vérifier que : $1 + j + j^2 = 0$ et que $-j^2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

(2) On considère la rotation R de centre $C(c)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui lie chaque point $M(z)$ à $M'(z')$.

(a) Montrer que : $z' = -j^2 z - jz$.

(b) soient $A(a)$ et $B(b)$, montrer que (ABC) équilatéral $\Leftrightarrow a + bj^2 + cj = 0$ ou $a + bj + cj^2 = 0$.

(3) Déterminer l'ensemble des point $s(z)$ tels que les point $sM(z), P(z - 1)$ et $Q(z^2)$ soient alignés.

تمرين 3

On considère que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on considère le complexe z' tel que : $z' = \frac{iz - 1}{z - i}$ M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' φ l'application telle que $\varphi(M) = M'$

(1) Montrer que : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z' \in i\mathbb{R}$

(2) Montrer que : $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$, puis en déduire l'image du cercle $C(O, 1) - \{A(i)\}$ par l'application φ .

(3) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{i, -i\} : \arg(z') + \arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, puis en déduire l'ensemble des M tel que $z' \in]-\infty, 0[$

(4) Vérifier que : $(z' - i)(z - i) = 2$, puis en déduire l'image du cercle $C(A, r)$ par l'application φ où $r > 0$.

(5) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$ on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : (z')^n = i^n$

(a) Vérifier que $(E) \Leftrightarrow (z+i)^n = (z-i)^n$ puis montrer que les images des solutions de l'équation (E) sont alignés.

(b) Montrer que les solutions de l'équation (E) s'écrivent sous la forme $\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ où $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

تمرین 4

Le plan complexe est lié à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et on considère les points $A(8), B(6j)$ et $C(8j^2)$ on considère les rotations $r_1 = R\left(C, \frac{\pi}{3}\right)$, $r_2 = R\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$ et $r_3 = R\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$ posons : $r_1(B) = A'$, $r_2(C) = B'$ et $r_3(A) = C'$.

(1) Construire les points A, B, C, A', B', C' dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(2) posons : $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$.

(a) Montrer que : $a' \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que : $b' = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et en déduire que $O \in (BB')$.

(c) Montrer que : $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.

(d) Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') se coupent en O .

(3) (a) Calculer la distance : $OA + OB + OC$.

(b) Montrer que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

(c) On considère le point $M(z)$ en déduire que : $|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)| = |a + bj^2 + cj| = 22$.

(d) Prouver que la distance : $MA + MB + MC$ est minimal quand $M = O$.

تمرین 5

Soit a un nombre complexe non nul.

I) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - ia\bar{a} = 0$.

❶ (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

❷ Montrer que a est solution de l'équation (E) si et seulement si $Re(a) = Im(a)$.

II) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $A(a), B(i\bar{a})$ et $C(1+ia)$.

❶ On pose $z = \frac{(1+ia) - a}{(i\bar{a}) - a}$.

(a) Montrer que $\bar{z} = \frac{(i-1)\bar{a} - i}{(i\bar{a}) - a}$.

(b) Montrer que A, B et C sont colinéaires si et seulement si $Im(a) = \frac{1}{2}$.

❷ On suppose que $Im(a) \neq \frac{1}{2}$.

Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et soit R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et posant $B' = R_1(B)$ et $C' = R_2(C)$ et soit E le milieu du segment $[BC]$.

(a) Déterminer respectivement les affixes b' et c' des points B' et C' .

(b) Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AE$.

تمرین 6

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f définit de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(z) = \frac{1}{6}[(1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}]$

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

II) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $z_{n+1} = f(z_n)$ et

$z_0 = 1$. Notons u_n le module du nombre complexe z_n .

❶ (a) Montrer que : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Dédurre que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

❷ Notons M_n l'image du nombre complexe z_n et posons $S_n = OM_0 + OM_1 + OM_2 + \dots + OM_n$.

(a) Montrer que : $S_n \leq 3 (\forall n \in \mathbb{N})$.

(b) Montrer que la suite (S_n) est convergente.

III) Posons $z = re^{i\theta}$ tel que $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $\mathbb{R}_+^*$.

❶ Montrer que : $f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$

❷ Montrer que les points M_n sont alignés.

تمرین 7

On considère que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \notin \mathbb{R}$ et $a \notin i\mathbb{R}$

Partie 1

On considère dans $\mathbb{C}$ les équations : $(E_a) : z^2 + 2az + 1 = 0$ et $(F_a) : z^2 + 2\frac{1}{a}z + 1 = 0$ et on note z_1 et z'_1 les solutions de (E_a) et z_2 et z'_2 les solutions de (F_a)

(1) Vérifier que $-1, 1, 0$ ne sont pas des solutions de (E_a) et de (F_a)

(2) Montrer que si $|a| = 1$ alors $(z \text{ est solution de } (F_a) \Leftrightarrow \bar{z} \text{ est solution de } (E_a))$

(3) (a) Sans faire des calculs donner les valeurs de $z_1 z'_1$ et $z_1 + z'_1$ et $z_2 z'_2$ et $z_2 + z'_2$ et montrer que : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z'_1} = -\frac{z'_2 - z_1}{z'_2 - z'_1}$

(b) Que peut-on conclure à propos des point s images des solutions de (E_a) et de (F_a)

(4) Dans cette question on prend $a = -ie^{-i\frac{\pi}{3}}$

(a) Écrire sous forme trigonométrique $-1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ puis en déduire que le discriminant de l'équation (E_a) est $\Delta = (2ie^{-i\frac{\pi}{6}})^2$

(b) Dédurre les solutions de (E_a) et de (F_a)

(c) Donner la forme trigonométrique des solutions de (F_a)

Partie 2

On considère les point $sA(a)$ et $B(\bar{a})$ et $C\left(\frac{a^2}{\bar{a}}\right)$

(1) Vérifier que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -\frac{a}{\bar{a}}$

(2) Montrer que les point sA, B, C ne sont pas alignés

(3) Montrer que : $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi + 2 \arg(a) [2\pi] \end{cases}$

(4) Dédurre l'ensemble des point $sA(a)$ tels que le triangle ABC soit équilatère

تمرین 8

On considère les points $A(1), B(-2), C(i)$ et I le milieu de $[AB]$. Et soit (C) une cercle de diamètre $[AB]$.

Partie 1

❶ Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et M une point d'affixe : $m = \frac{1 + 2ix}{1 - ix}$

a- Vérifier que : $m \neq 2$ et $m \neq 1$.

b- Calculer $\frac{m - 1}{m + 2}$ puis déduire $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$.

c- Dédurre que $M \in (C) - \{A, B\}$.

❷ Réciproquement, soit N une point de $(C) - \{A, B\}$ d'affixe n .

Et on pose $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IN}) \equiv \theta [2\pi]$

a- Déterminer $\left|n + \frac{1}{2}\right|$ et $\arg\left(n + \frac{1}{2}\right)$ puis déduire que $n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{i\theta}$

b- Déterminer la forme exponentielle de nombre $v = \frac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)}$

c- Dédurre qu'il existe un nombre réelle $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $n = \frac{1 + 2ix}{1 - ix}$

❸ Qu'est ce que on peut déduire ?

Partie 2

Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, on pose $\varphi(z) = (1-i)\frac{z-i}{z-1}$
et $z = x + iy$

❶ Montrer que $\varphi(z) = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$

❷ Montrer que $\varphi(z) \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

❸ Déduire la nature d'ensemble $F = \left\{M(z) / \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$

Partie 3

Soit $a \in \mathbb{C}$ et on considère l'équation (E) :

$z - i\bar{z} = a$ et on pose $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

❶ On suppose que $a = 0$, résoudre dans ce cas l'équation (E) .

❷ On suppose que l'équation (E) admet une solution.

a- Montrer que $a^2 \in i\mathbb{R}^-$.

b- Déduire qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $a = r\bar{u}$.

❸ On suppose que $a = r\bar{u}$ avec $r \in \mathbb{R}$.

a- Montre que $\frac{a}{2}$ est une solution de l'équation (E) .

b- On pose $z' = z - \frac{a}{2}$.

Montrer que :

z' est solution d'équation $z - i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z$ est solution d'équation (E)

❹ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

تمرین 9

Le plan complexe $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, posons $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$.

Partie 1

On pose $z = x + iy$ tel que $x, y \in \mathbb{R}$ avec $(x, y) \neq (-1, 0)$

❶ Montrer que :

$$f(z) = \frac{(x^2 + x + y^2 - y) + i(y - x - 1)}{(x+1)^2 + y^2}$$

❷ Déterminer les deux ensembles suivantes :

$$\Gamma_1 = \{M(z)/f(z) \in i\mathbb{R}\} \text{ et }$$

$$\Gamma_2 = \{M(z)/arg(f(z)) \equiv 0[2\pi]\}$$

Partie 2

❶ Donner la forme algébrique de $(1 - 2i)^2$.

❷ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $f(z) = z + 1$. (notons ces solutions par a et b tel que $|a| < |b|$).

❸ Écrire a et b sous la forme trigonométrique.

❹ Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants : b_0, b_1, b_2 et b_3 tel que : $b_k^4 = b$.

Partie 3

❶ Dans $\mathcal{P}$ On considère les points suivants : $A(-i)$, $B(-1+i)$ et $C(2)$.

❷ Calculer $\frac{AB}{AC}$ et déterminer l'angle suivant : $(\widehat{AC, AB})$

❸ Déduire la nature du triangle ABC .

Partie 4

Posons $z = e^{i\theta}$ tel que $\theta \in]0, \pi[$.

❶ Montrer que : $f(z) = \frac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

❷ Déduire le module et l'argument du nombre complexe (s'il existe) $f(z)$ suivant les valeurs de θ .

تمرين 4

(تغيير المتغير)

احسب التكاملات الآتية :

$$K_2 = \int_0^1 \sqrt[3]{x+1} dx \quad K_1 = \int_2^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$K_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx$$

$$K_5 = \int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x + 1} dx \quad K_4 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$K_6(t) = \int_{-1}^t x^2 \sqrt{x+1} dx$$

تمرين 5

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+e^{2x}} dx : \text{نضع}$$

بين أن : $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{2x} \cos x}{1+e^{2x}} dx$ ثم استنتج قيمة التكامل I .

تمرين 6

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على

$$\mathbb{R} : \text{بـ } g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

① احسب $\forall x \in \mathbb{R} g'(x)$

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \text{② استنتج قيمة التكامل}$$

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \text{و } I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \quad \text{II نضع}$$

① تحقق من أن $I - J = K$

② باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن :

$$I = \sqrt{2} - J$$

③ استنتج قيمة I و J .

تمرين 7

نعتبر التكامل الآتي :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$$

① احسب I_1

② باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$$

③ احسب I_5

تمرين 1

(الدوال الأصلية)

احسب التكاملات الآتية :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(2x) dx$$

$$I_3 = \int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx \quad I_4 = \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx \quad I_6 = \int_1^2 \frac{2x^2 + 4x + 7}{x^2 + 2x + 5} dx$$

$$I_7 = \int_0^1 x \sqrt{x} dx \quad I_8 = \int_0^1 \frac{2}{x^2 + x + 1} dx$$

$$I_9 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{-1}{x^2 + 2x - 5} dx$$

تمرين 2

(المكاملة بالأجزاء)

★ احسب التكاملات الآتية :

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(3x) dx \quad J_1 = \int_2^e \ln x dx$$

$$J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x dx \quad J_3 = \int_1^2 \cos(\ln x) dx$$

$$J_6 = \int_0^1 x \arctan(x) dx \quad J_5 = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$J_8 = \int_0^{\pi} x e^x \cos x dx \quad J_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx$$

★ احسب النهايتين :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \ln(1-t^2) dt \quad \text{مع } (\varepsilon \in]0, 1[)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x (s+3)(s-1)e^{-s} ds \quad \text{مع } (x \in \mathbb{R})$$

تمرين 3

① حل في $\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases} a - 3b = \ln 4 \\ a + b = \ln 16 \end{cases}$$

$$\text{② نضع : } A = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx \quad \text{و}$$

$$B = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

(أ) احسب $A + B$ و $A - 3B$

(ب) استنتج قيمة التكاملين A و B .

تمرين 8

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$$

- ① أثبت أن g دالة زوجية.
- ② أثبت أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$
ثم احسب $g'(x)$ لكل $x > 0$.
- ③ (أ) باستعمال المكاملة بالاجزاء تحقق من أن
(ب) $(\forall x > 0) : g(x) < \frac{10}{3x}$
ثم استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
- ④ (أ) أثبت أن $(\forall x > 0) :$

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

- (ب) بين أن لكل x من $]0; +\infty[$ لدينا :
 $(\forall x > 0) \quad g(x) < \frac{10}{3x}$
ثم استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
- ④ (أ) أثبت أن $(\forall x > 0) :$

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt < 2x$$

- (تذكر أن : $(\forall t > 0) : 1 - \cos t \leq t$).
- (ب) تحقق من أن $(\forall x > 0) :$

$$g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

- (ج) استنتج قيمة $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

تمرين 9

لكل n عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

نعتبر الدالة g_n المعرفة على $[n; +\infty[$ بما يلي

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln t} dt$$

- ① (أ) أثبت أن الدالة g_n قابلة للاشتقاق على $[n; +\infty[$ ثم حدد g'_n .
- (ب) أثبت أن الدالة g_n تزايدية قطعاً على $[n; +\infty[$.
- ② (أ) بين أن $(\forall x \geq n) :$

$$g_n(x) \geq \ln \left(\frac{x-1}{n-1} \right)$$

- (يمكنك استعمال المتفاوتة : $(\forall t \geq 0) : \ln(1+t) \leq t$)
- (ب) استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$.
- ③ (أ) بين أن الدالة g_n تقابل من $[n; +\infty[$ الى المجال $[0; +\infty[$.
- (ب) استنتج أن

$$(\forall x \geq 2), (\exists ! u_n \geq n) \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t} dt = 1$$

- ④ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ المعرفة في السؤال ③ (ب).

- (أ) بين أن : $(\forall n \geq 2) :$

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t} dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t} dt$$

- (ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعاً. ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين 1

Pour tout entier positif n , on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$$

❶ (a) Calculer I_1 .

(b) Calculer $I_0 + I_1$, en déduire I_0 .

❷ (a) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n + I_{n+1} \leq 2I_n \leq I_{n-1} + I_n$$

❸ (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $I_p + I_{p+1}$ en fonction de p .

(b) Donner les valeurs exactes de I_2 , I_3 et I_4 .

(c) Prouver que pour tout entier naturel n supérieur à 2,

$$\frac{1}{2n}(1 - e^{-n}) \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}(1 - e^{1-n})$$

❹ En utilisant l'encadrement précédent, démontrer que les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leurs limites.

تمارين 2

Pour $n \in \mathbb{N}$.

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$$

❶ Calculer I_0 .

❷ Calculer $I_0 + I_1$. En déduire I_1 .

❸.a. Quel est le signe de I_n .

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$.

c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.

d. Montrer que la suite (I_n) convergente et calculer sa limite.

e. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$

f. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

❹.a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx$$

b. Etablir les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}$$

c. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{4}$$

d. A l'aide des questions (❸.a. et ❹.c.), donner un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$

Quand n tend vers $+\infty$.

تمارين 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\ln x} ; & x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

Partie 1

I) ❶ Déterminer D_f .

❷ Montrer que f est continue à droite de 0 .

❸ Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

❹ Calculer la limite $\lim_{+\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat.

❺ (a) Montrer que $f'(x) = -2g(x)f(x) \forall x \in D_f - \{0\}$ où g est une fonction à déterminer.

(b) Donner le tableau de variation de f .

(c) Déterminer l'intersection de la courbe (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$

(d) Tracer la courbe (C_f) .

❻ Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$.

(a) Montrer que h est bijective de I dans J à déterminer.

(b) Tracer $(C_{h^{-1}})$.

Partie 2

II) ❶ (a) Donner le tableau de variation de g .

(b) Dédire que $\forall x \in [1, +\infty[: |g(x)| \leq \frac{1}{e}$.

❷ (a) Montrer que $\forall x, y \in [1, +\infty[:$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{e}|x - y|$$

(b) Sachant que $2,7182 \leq e \leq 2,7183$ donner une estimation au nombre $f(2,7182)$ à 10^{-4} près.

Partie 3

III) On considère F la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_1^{e^x} \frac{f(t)}{t} ; & x > 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

❶ Vérifier que $\forall x \in]0, +\infty[:$

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-u^2} du$$

❷ (a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[:$

$$|F(x) - F(0)| < 1 - e^{-x^2}$$

(b) Dédire que F est continue et dérivable à droite de 0 .

❸ Sachant que $\forall x \in]0, +\infty[:$

$$F(x) \leq \frac{1}{x}(1 + e^{-1} - e^{-x})$$

Calculer $\lim_{+\infty} F(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

❹ (a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[:$

$$F'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{F(x)}{x}$$

(b) Dédire que $\forall x \in]0, +\infty[:$

$$F'(x) = -2x \int_0^1 t^2 e^{-(xt)^2} dt$$

(c) Donner le tableau de variation de F .

تمارين 1

(La divisibilité)

❶ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

- (a) $6/7^{n+1} - 1$.
- (b) $17/3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$.
- (c) $9/2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1$.

تمارين 2

(La division euclidienne)

❶ Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre 70^{60} par 5.

❷ Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre $333^{222} + 222^{333}$ par 5.

❸ Déterminer suivant les valeurs de l'entier n le reste de la division euclidienne du nombre 2^n par 9.

❶ Déterminer n de $\mathbb{N}^*$ si la division euclidienne de 125 sur n donner q est le quotient et q^3 est le reste.

تمارين 3

(La congruence)

❶ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

- (a) $n^7 \equiv n[7]$.
- (b) $4^{2n+2} \equiv 1[15]$.
- (c) $(n+1)^{2021} - 1 \equiv 0[n]$.
- (d) $2^n \equiv 1[7] \Leftrightarrow n \equiv 0[3]$

❷ Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $A = n^3 - 3n + 5$.

- (a) Déterminer n pour la quelle $A \equiv 0[7]$.
- (b) Déterminer n pour la quelle $A \equiv 1[7]$.

❸ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$(\mathcal{E}_1) : 3x \equiv 4[5]$ et $(\mathcal{E}_2) : 2x \equiv 3[6]$.

تمارين 4

(Un entier non carré parfait)

Soit n un entier naturel.

❶ Montrer que si n est impaire alors $n^2 \equiv 1[8]$.

❷ Montrer que si n est paire alors $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$.

❸ Soit a, b et c trois entiers impaires :

(a) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré parfait.

(b) Montrer que $2(ab + bc + ca) \equiv 6[8]$.

(c) Dédire que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré parfait.

تمارين 5

(Les nombres premiers)

❶ Soit n de $\mathbb{Z}$.

(a) Montrer que les deux nombres $a_n = n^2 - 3n + 4$ et $b_n = n^2 + 3n + 4$ sont paires.

(b) Dédire que $c_n = n^4 - n^2 + 16$ n'est pas un nombre premier.

تمارين 6

(Les systèmes)

Résoudre dans $\mathbb{N}^{*2}$ les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 12 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ x \wedge y = 8 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} xy = 2700 \\ x \wedge y = 6 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_4) \begin{cases} x \vee y = 30 \\ x \wedge y = 7 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_5) \begin{cases} x \vee y - x \wedge y = 77 \\ 0 < x < y \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_6) \begin{cases} x \vee y + 10x \wedge y = 142 \\ x \leq y \end{cases}$$

تمارين 7

(Nombre de Fermat)

Pour chaque entier n on pose $F_n = 1 + 2^{2^n}$.

❶ Montrer que $\forall n > 1 : F_n \equiv 7[10]$.

❷ Montrer que $F_5 \equiv 0[641]$. Dédire.

تمارين 8

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$

❶ Montrer que $4/(p^2 - 1)$.

❷ Si $(p > 3)$ alors prouver que $3/(p^2 - 1)$.

تمارين 9

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante $(\mathcal{E}) : 4x^2 - 9y^2 = 432$.

❶ (a) Montrer que si (x, y) est solution de $(\mathcal{E})$ alors $3/x$ et $2/y$.

(b) Prouver que si (X, Y) est solution de $X^2 - Y^2 = 12$ alors $(3X, 2Y)$ est solution de $(\mathcal{E})$.

❷ (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2 : X^2 - Y^2 = 12$.

(b) Déduire les solutions de $(\mathcal{E})$.

تمارين 10

I) ❶ Résoudre dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'équation $\bar{3}x = \bar{4}$.

❷ Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $x^3 = x$.

II) ❶ Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation $\bar{4}x + \bar{5} = \bar{0}$.

❷ Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{4}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + y = \bar{5} \end{cases}$$

❸ Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation $\bar{4}x^2 + \bar{5}x + \bar{7} = \bar{0}$.

تمارين 11

❶ Dresser les tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

❷ (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

(b) Résoudre l'équation $x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$.

تمارين 12

Soient p et q de $\mathbb{N}^*$.

❶ Montrer l'équivalence suivante :

$$p \wedge q = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} p \wedge q(p + q) = 1 \\ (p + q) \wedge p = 1 \end{cases}$$

❷ Soient x et y de $\mathbb{N}^*$ tel que $(\mathcal{E}) : x(43 - x) = y(x + y)$ et $d = x \wedge y$ avec $x = ad$ et $y = bd$.

(a) Prouver que $a(43 - ad) = bd(a + b)$

(b) Montrer que a/d .

(c) Posons $d = ac$. Démontrer que : $c(a^2 + ab + b^2) = 43$ puis déduire que $c = 1$.

(d) Déterminer les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$.

تمارين 13

(Une suite)

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 & U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$$

❶ (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = 2^n - 1$.

(b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} \wedge U_n = 1$.

(c) Déterminer le reste de la division du nombre 2^n par 9.

(d) Montrer que $(9/U_n) \Rightarrow (63/U_n)$.

تمارين 14

(Théorème de Fermat)

Soit p un nombre premier positif.

❶ Montrer que $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\} : p/C_p^k$.

❷ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)^p \equiv n^p[p]$.

❸ (a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{N} : a^p \equiv a[p]$.

(b) Déduire que $\forall a \in \mathbb{Z} : a^p \equiv a[p]$.

❹ Déduire que $\forall a \in \mathbb{Z} : a \wedge p = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$.

تمارين 15

❶ Déterminer toutes les entiers naturels a, b et c tel que : $\overline{bbac}_{(7)} = \overline{abca}_{(11)}$.

❷ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tel que : $c = \overline{101}_{(b)}$ et $a = \overline{131}_{(b)}$

(a) Exprimer le produit abc dans le système de numération de base b tel que $b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

تمارين 1

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N =$

$$\underbrace{111 \dots 1}_{2010 \text{ fois } 1}$$

❶ Montrer que le nombre N est divisible par 11.

❷ (a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que $10^{2010} - 1 = 9N$

(b) Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$.

(c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N .

❸ Montrer que le nombre N est divisible par 22121

تمارين 2

❶ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathcal{E}) : 143x - 195y = 52$.

(a) Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis en déduire que l'équation $(\mathcal{E})$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

(b) Sachant que $(-1, -1)$ est une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathcal{E})$ en précisant les étapes de la résolution.

❷ Soit n un entier naturel non nul premier avec 5. Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$ on a : $n^{4k} \equiv 1[5]$.

❸ Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y[4]$.

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}^*$, on a : $n^x \equiv n^y[5]$.

(b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{Z}^*$, on a : $n^x \equiv n^y[10]$.

❹ Soient x et y deux entiers naturels tel que (x, y)

est solution de l'équation $(\mathcal{E})$

Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

تمارين 3

L'objectif de l'exercice est de chercher les entiers naturels n strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante : $(\mathcal{R}) : 3^n - 2^n \equiv 0[n]$

❶ On suppose que n vérifie la propriété $(\mathcal{R})$ et soit p le plus petit diviseur premier positif de n .

(a) Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$, en déduire que $p \geq 5$.

(b) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$.

(c) Montrer qu'il existe un couple (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$

(d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$

$(a = q(p-1) + r$ avec $0 \leq r < p-1$ et $q \in \mathbb{Z})$

Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que :

$$rn = 1 + k(p-1)$$

❷ En déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant $(\mathcal{R})$.

تمارين 4

On admet que 2017 est un nombre premier et que $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$

❶ Soit le couple (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $px + y^{p-1} = 2017$.

(a) Vérifier que $p < 2017$.

(b) Montrer que p ne divise pas y .

(c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis déduire que p divise 2016.

(d) Montrer que $p = 7$.

② Déterminer suivant les valeurs de p , les couple (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui vérifie $px + y^{p-1} = 2017$.

تمرین 5

① Déterminer tous les nombres entiers naturels m tels que : $m^2 + 1 \equiv 0[5]$.

② Soit p un nombre premier tel que $p = 3 + 4k$ où k est un nombre entier naturel.

Soit n un nombre entier naturel tel que : $n^2 + 1 \equiv 0[p]$.

(a) Vérifier que : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1[p]$.

(b) Montrer que n et p sont premiers entre eux.

(c) En déduire que : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1[p]$.

(d) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n vérifiant : $n^2 + 1 \equiv 0[p]$.

تمرین 6

① (a) Vérifier que le nombre 503 est premier.

(b) Montrer que $7^{502} \equiv 1[503]$; en déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$.

② On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathcal{E}) : 49x - 6y = 1$.

Sachant que $(1, 8)$ est une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$; résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathcal{E})$ en précisant les étapes de la résolution.

③ On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$.

(a) Montrer que le couple $(7^{2006}, N)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

(b) Montrer que $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$.

(c) En déduire que le nombre N est divisible par 2012.

تمرین 7

① Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier ($p \geq 5$) tel que $p \mid (a^2 + a + 1)$.

(a) Vérifier que $a^3 \equiv 1[p]$.

(b) Montrer que $p \mid (a + 1) = 1$.

(c) Montrer que $p \mid (a - 1) = 1$. (Hint : $a^2 + a + 1 = (a - 1)(a + 2) + 3$)

(d) Déduire que $\min\{k \in \mathbb{N}^* / a^k \equiv 1[p]\} = 3$.

(e) On utilisant le théorème de Fermat montrer que $a^{p-1} \equiv 1[p]$ puis déduire que $p \equiv 1[3]$.

② On utilisant la question (①) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre $(3(n!))^2 + (3(n!)) + 1$ admet un diviseur premier p tel que $n < p$ et $p \equiv 1[3]$.

③ Déduire qu'il-y-a une infinité de nombres premiers qui s'écrit sous la forme $3k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

تمرین 8

Let x be an integer number in which : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$.

① Note that $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$. Prove that 1436 and 2015 are primes between them.

② Let d be a common divisor of the two numbers x and 2015.

(a) Prove that d divides 1436.

(b) Deduce that x and 2015 are primes between them.

③ (a) by using Fermats theorem prove that $x^{1440} \equiv 1[5]$, $x^{1440} \equiv 1[13]$ and $x^{1440} \equiv 1[31]$. (Notice that $2015 = 5 \times 13 \times 31$).

(b) Prove that $x^{1440} \equiv 1[65]$ then deduce that $x^{1440} \equiv 1[2015]$.

④ Prove that $x \equiv 1051[2015]$.

تمرین 9

I- ① Letting $z \in \mathbb{Z}$, prove that if a and 13 are primes between them then $a^{2016} \equiv 1[13]$.

② We consider in $\mathbb{Z}$ the equation : $(E) : x^{2015} \equiv 2[13]$ and letting x be the solution of the equation (E) .

(a) Prove that x and 13 are primes between them.

(b) Prove that : $x \equiv 7[13]$.

❸ Prove that the set of solutions of the equation (E) is $S = \{7 + 13k/k \in \mathbb{Z}\}$.

تمرین 10

First part

Let (a, b) be an element in $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ such that the prime number 173 divides $a^3 + b^3$.

❶ Prove that : $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$ (Notice that : $171 = 3 \times 57$).

❷ Prove that 173 divides a if and only if 173 divides b .

❸ We suppose that 173 divides a . Prove that divides $a + b$.

❹ We suppose that 173 does not divide a .

(a) by using Fermats theorem prove that : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$.

(b) Show that : $a^{171}(a + b) \equiv 0[173]$.

(c) Deduce that 173 divides $a + b$.

Second part

We consider in $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ the equation : (E) : $x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$. Let (x, y) be an element in $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ a solution of the equation (E) : we put $x + y = 173k$ such that $k \in \mathbb{N}^*$.

❶ Verify that : $k(x - y)2 + (k - 1)xy = 1$.

❷ Show that : $k = 1$ then solve the equation (E).

تمرین 11

❶ Soit x un entier non nul premier avec 53.

(a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52} .

(b) En déduire que pour tout entier naturel k , $x^{52k+1} \equiv x[53]$.

❷ Soit l'équation $(\mathcal{E}_1)$: $x^{29} \equiv 2[53]$ avec $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que 2^9 est une solution de $(\mathcal{E}_1)$.

❸ Soit x une solution de l'équation $(\mathcal{E}_1)$

(a) Montrer que x est premier avec 53.

(b) Montrer que $x^{261} \equiv x[53]$

(c) En déduire que $x \equiv 2^9[53]$

❹ (a) Montrer que $2^9 \equiv 35[53]$.

(b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $(\mathcal{E}_1)$.

❺ On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(\mathcal{E}_2)$: $71u - 53v = 1$.

(a) Vérifier que $(3, 4)$ est une solution de l'équation $(\mathcal{E}_2)$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(\mathcal{E}_2)$.

❻ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le systeme :
$$\begin{cases} x \equiv 34[71] \\ x^{29} \equiv 2[53] \end{cases}$$

تمرین 12

Soient a et b deux nombres de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} : (a^n + n)/(b^n + n)$. L'objectif de ce problème est de montrer par absurde que $a = b$.

Supposons alors que $a \neq b$ et soit p un nombre premier positif tel que $(a - b) \wedge p = 1$.

❶ On pose $m = p(1 + a) - a$, vérifier que $m \in \mathbb{N}$ est solution du système $(\mathcal{S}) \begin{cases} x \equiv -a[p] \\ x \equiv 1[p - 1] \end{cases}$

❷ Déduire que l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{Z}^2$ est $E = \{m + kp(p - 1)/k \in \mathbb{Z}\}$.

❸ En utilisant le théorème de Fermat montrer que $a^m + m \equiv 0[p]$.

❹ Montrer que $b^m + m \equiv b - a[p]$. Déduire ?

تمرین 13

Partie 1

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_*^2$ tel que $\alpha \wedge \beta = 1$ et soit p un nombre premier tel que $p | (\alpha^2 + \beta^2)$ et $p > 2$.

❶ Montrer que : $p \wedge \alpha = 1$.

❷ En utilisant le théorème de Bezout montrer que $\exists u \in \mathbb{Z} : \alpha u \equiv 1[p]$.

❸ On pose $t = \beta u$, En utilisant le fait que $\alpha^2 + \beta^2 \equiv 0[p]$ et la question (❷) montrer que

$$t^2 \equiv -1[p].$$

④ En utilisant le théorème de Fermat montrer que

$$p \equiv 1[4].$$

Partie 2

Dans $\mathbb{N}_*^3$ on considère l'équation suivante ($\mathcal{E}$) :
 $(x^2 + y^2)z = 2013xy$.

Soient (x, y, z) solution de l'équation ($\mathcal{E}$), on pose
 $d = x \wedge y$, $x = da$ et $y = db$.

① Vérifier que $a \wedge b = 1$ et $z(a^2 + b^2) = 2013ab$.

② Montrer que $(a^2 + b^2) \wedge (ab) = 1$ puis déduire
 que $(a^2 + b^2) |_{2013}$.

③ En utilisant la question (④) de la **Partie 1**
 montrer que $(a^2 + b^2) = 61$. (Hint : $2013 = 3 * 11 * 61$ et 61 est l'unique diviseur premier du
 nombre 2013 qui vérifie $p \equiv 1[4]$)

④ Déduire l'ensemble des solutions de l'équation

($\mathcal{E}$). (Hint : $5^2 + 6^2 = 61$)

تمرین 14

Dans tout ce qui suit on pose $\forall x \in \mathbb{Q} : P(x) = 2x^4 + 3x + 1$.

① Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha \wedge \beta = 1$ et
 $P(\frac{\alpha}{\beta}) \in \mathbb{Z}$.

(a) Soit $u \in \mathbb{Z}$ tel que $u := P(\frac{\alpha}{\beta})$, montrer que
 $2\alpha^4 = \beta(u\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - \beta^3)$.

(b) Déduire que $\beta | 2$. (Hint : Théorème de Gauss)

(c) Montrer que $\beta = 1$.

② Déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q} : (P(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z})$.

③ Considérons dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante ($\mathcal{E}$) :
 $P(x) \equiv 0[10]$.

(a) Montrer que si x est solution de l'équation ($\mathcal{E}$)
 alors $x \wedge 10 = 1$. (Hint : Théorème de Bezout)

تمرين 1

Munissons $\mathbb{R}^2$ par la lois de composition interne $*$ donner par : $\forall (x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$
 $(x, y) * (a, b) = (x + a, ye^a + be^{-x})$

- ❶ Prouver que la lois $*$ est associative dans $\mathbb{R}^2$.
- ❷ Prouver que $*$ admet un élément neutre dans $\mathbb{R}^2$.
- ❸ Calculer $(3, 1) * (1, 0)$ et $(1, 0) * (3, 1)$, conclure ?
- ❹ Montrer que tout éléments de $\mathbb{R}^2$ admet un inverse dans $(\mathbb{R}^2, *)$.
- ❺ Dédire la structure de $(\mathbb{R}^2, *)$.

تمرين 2

Munissons $\mathbb{R}^2$ par la lois de composition interne $*$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2$,
 $(x, y) * (x', y') = (x + x' + xx', y + y')$.

Et considérons l'ensemble

$$\mathbb{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq -1\}$$

- ❶ (a) Montrer que $(\mathbb{G}, *)$ est une **partie stable** de $(\mathbb{R}^2, *)$. (Hint : $(x + 1)(x' + 1) = (x + x' + xx' + 1)$)
- (b) Montrer que $(\mathbb{G}, *)$ est un **groupe abélien**.

- ❷ Considérons l'ensemble :

$$\mathbb{B} = \{(x, \ln(x + 1)) / x \in]-1, +\infty[\}. \text{ Montrer que } (\mathbb{B}, *) \text{ est un sous groupe de } (\mathbb{G}, *).$$

تمرين 3

Munissons $\mathbb{R}$ par la lois de composition interne τ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \tau y = x \sqrt{1 + y^2} + y \sqrt{1 + x^2}.$$

- I) ❶ Vérifier que τ est un lois de composition interne

$$\text{❷ Vérifier que pour tout } (x, y) \text{ dans } \mathbb{R} \text{ on a : } \sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + y^2} + xy = \sqrt{1 + (x \tau y)^2}$$

II) Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- ❶ Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer son inverse f^{-1} .

- ❷ On utilisant f ou f^{-1} montrer que $(\mathbb{R}, \tau)$ est un groupe commutatif.

- ❸ Dédire l'élément neutre et l'inverse de chaque élément x du groupe $(\mathbb{R}, \tau)$.

- ❹ Posons pour tout x dans $\mathbb{R} \ x^{(n)} = x \tau x \tau \dots \tau x$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) avec $x^{(0)} = 1$ et $x^{(1)} = x$.

Calculer $x^{(n)}$ en fonction de n .

تمرين 4

- ❶ Montrer que $\forall (x, y) \in I :$

$$e^{x+y} - e^y - e^x + 2 > 1 \text{ avec } I =]0, +\infty[.$$

- ❷ On définit dans I la lois de composition interne $\perp$
 $\forall (x, y) \in I^2 : x \perp y = \ln(e^{x+y} - e^y - e^x + 2)$.

(a) Considérons l'application f définie de I dans I par : $f(x) = \ln(x + 1)$. Montrer que f est une application **bijective**.

(b) Mq f est un homomorphisme de $(I, \times)$ dans $(I, \perp)$.

(c) Dédire la structure de $(I, \perp)$.

تمرين 5

I) Soit x et y de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, posons : $x * y = x + y - 2xy$.

- ❶ Montrer que $*$ est un lois interne dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.
- ❷ Montrer que $*$ est un lois commutatif associatif.
- ❸ Montrer que $(\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, *)$ est un groupe commu.

- ❹ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2x)^n]$$

II) Pour tout x de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \text{ et considérons l'en-}$$

$$\text{semble } \mathbb{E} = \left\{ A(x) / x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \right\}.$$

- ❶ Montrer que $\mathbb{E}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.
- ❷ Considérons l'application f de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ dans $\mathbb{E}$ tel que $f(x) = A(x)$.

(a) Montrer que f est un isomorphisme de

$(\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, *)$ dans $(\mathbb{E}, \times)$.

(b) Déduire la structure de $(\mathbb{E}, \times)$.

(c) Soit $B = A\left(-\frac{1}{2}\right)$. Montrer que : $B^n = A\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$ et $(B^n)^{-1} = A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

(d) Montrer que (I, A) est une **base** de l'espace vectorielle $\mathbb{E}$.

تمارين 6

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. Posons $\mathbb{E} = \left\{M_a = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ ae^a & e^a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{Z}\right\}$ et considérons l'application f définie de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{E}$ par : $f(a) = M_a (\forall a \in \mathbb{Z})$.

❶ (a) Montrer que $\mathbb{E}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(b) Mq f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{E}, \times)$.

(c) Déduire la structure de $(\mathbb{E}, \times)$.

❷ Posons $M_a^{(n+1)} = M_a^{(n)} \times M_a (\forall n \in \mathbb{N})$ avec $M_a^{(0)} = I$, $M_a^{(1)} = M_a$ et $M_a^{(p)} = (M_a^{(-1)})^{-p} (\forall p \in \mathbb{Z}_*^{-1})$.

(a) Montrer que $M_a^{(p)} = M_{ap} (\forall p \in \mathbb{Z})$

(b) Résoudre suivant les valeurs du paramètre n l'équation : $M_x^{(n)} \times M_5 = M_{5n}$ où x est inconnu de $\mathbb{Z}$.

تمارين 7

On considère l'espace vectoriel de dimension 2 noté $(V_2, +, \cdot)$. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de V_2 . On pose : $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$. Soit $*$ la loi de composition interne définie par : $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 (x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx' + yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j}$

❶ (a) Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de V_2

(b) Vérifier que : $\vec{e}_1 * \vec{e}_1 = \vec{e}_1$; $\vec{e}_2 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2$ et $\vec{e}_1 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2 * \vec{e}_1 = \vec{0}$

(c) Montrer que : $\forall (X, X', Y, Y') \in \mathbb{R}^4 (X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2) * (X'\vec{e}_1 + Y'\vec{e}_2) = XX'\vec{e}_1 + YY'\vec{e}_2$

❷ (a) Montrer que la loi $*$ est commutative.

(b) Montrer que la loi $*$ est associative.

(c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

(d) Mq $(V_2, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire.

❸ Soit $\vec{u} \in V_2 - \{\vec{0}\}$. On note : $E_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$

(a) Montrer que $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(V_2, +)$

(b) Montrer que $(E_{\vec{u}}, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(V_2, +, \cdot)$

(c) Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $*$ $\Leftrightarrow$ la famille $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$ est liée

❹ On suppose que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^*) ; \vec{u} * \vec{u} = \alpha\vec{u}$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow E_{\vec{u}}$ t.q. $x \mapsto \frac{x}{\alpha}\vec{u}$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ vers $(E_{\vec{u}}, *)$

(b) En déduire que $(E_{\vec{u}}, +, *)$ est un corps commutatif.

تمارين 8

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, considérons :

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices tel que : $\mathcal{E} = \{M_{(a,b)} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a^2 - 2b^2 = 1\}$.

❶ Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A \in \mathcal{E}$.

❷ (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et que la loi $\times$ est commutatif dans $\mathcal{E}$.

(b) Montrer que tous éléments de $\mathcal{E}$ admettent un inverse pour la loi interne $\times$.

(c) Montrer que $(\mathcal{E}, \times)$ est un **groupe abélien**.

❸ Posons $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose : $A^{n+1} = A^n \times A$. Posons $\mathbb{G} = \{A^n / n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Vérifier que $\mathbb{G} \subset \mathbb{E}$.

(b) Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des **unités** (des éléments inversibles) de $\mathbb{G}$ pour la loi $\times$ dans $\mathbb{E}$. Montrer que $\mathbb{H} = \{B^n / n \in \mathbb{N}\}$ tel que

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

I) Soit n un entier naturel non nul, simplifier les expressions suivantes :

$$\textcircled{1} \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot n \cdot n!} \quad \textcircled{2} \frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!} \quad \textcircled{3} \frac{(n+1)!}{(n+1)!}$$

II) $\textcircled{1}$ Par récurrence montrer que : $n! \leq n^n$; $(\forall n \geq 1)$

$\textcircled{2}$ Montrer que :

$$(a) A_{n+1}^{p+1} = (n+1)A_n^p \quad (b) C_{n+1}^{p+1} = \frac{n+1}{p+1} C_n^p.$$

III) Déterminer n dans les cas suivants :

$$\textcircled{1} A_n^2 = 72.$$

$$\textcircled{2} A_n^4 = 42A_n^2.$$

$$\textcircled{3} 2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n.$$

IV) Soit n et p deux entiers naturels, Démontrer les égalités suivantes :

$$\textcircled{1} pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1} \quad 1 \leq p \leq n.$$

$$\textcircled{2} C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1} \quad 0 \leq p \leq n.$$

$$\textcircled{3} C_n^p = C_{n-2}^{p-1} + 2C_{n-2}^{p-2} + C_{n-2}^{p-3} \quad 2 \leq p \leq n.$$

Exercice 2

Une enquête sur 700 travailleurs d'une société concernant la moyenne du transport utiliser donne les résultats suivants :

500 utilisent le bus de la société.

400 utilisent les taxis.

260 utilisent Les deux moyennes du transport.

$\textcircled{1}$ Déterminer le nombre des travailleurs qui utilisent le bus uniquement.

$\textcircled{2}$ Déterminer le nombre des travailleurs qui utilisent les taxis uniquement.

$\textcircled{3}$ Déterminer le nombre des travailleurs qui n'utilisent aucune de ces moyennes de transport.

Exercice 3

En utilisant les chiffres suivants : 1-2-3-4-5.

$\textcircled{1}$ Combien de nombre composé de trois chiffres peut-on écrire ?

$\textcircled{2}$ Combien de nombre composé de trois chiffres différents peut-on écrire ? (différents deux à deux)

$\textcircled{3}$ Combien de nombre composé de trois chiffres et qui contient le chiffre 4 peut-on écrire ?

$\textcircled{4}$ Combien de nombre paire composé de trois chiffres peut-on écrire ?

$\textcircled{5}$ Combien de nombre composé de trois chiffres différent et divisibles par 3 peut-on écrire ?

Exercice 4

Dans un ensemble composé de 12 hommes et 8 femmes, on veut construire une comité de 3 personnes.

$\textcircled{1}$ Quel est le nombre de comités possibles ?

$\textcircled{2}$ Quel est le nombre de comités possibles qui contient un seul homme ?

$\textcircled{3}$ Quel est le nombre de comités possibles composé seulement par les femmes ?

$\textcircled{4}$ Quel est le nombre de comités possibles qui contient au moins un homme ?

Du même ensemble on veut choisir une comité composé d'un président et d'un vice président et un secrétaire.

$\textcircled{5}$ Quel est le nombre de comités possibles ?

$\textcircled{6}$ Quel est le nombre de comités possibles sachant que le président est un homme ?

$\textcircled{7}$ Quel est le nombre de comités possibles sachant que le président est un homme et la secrétariat et occupé par une femme ?

Exercice 5

Dans un concours chaque candidat doit répondre

aux 7 questions parmi 10.

- ❶ Calculer le nombre des cas possibles ?
- ❷ Calculer le nombre des cas possibles sachant que les trois premières questions sont obligatoires ?
- ❸ Calculer le nombre de cas possible sachant que les quatre questions parmi les cinq premières sont obligatoires ?

Exercice 6

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont cinq verts, trois rouges et deux jaunes. On y prélève simultanément trois boules de l'urne.

- ❶ Combien de prélèvements différents peut-on ainsi obtenir ?
- ❷ Combien de prélèvements qui contiennent des boules de mêmes couleurs peut-on ainsi obtenir ?
- ❸ Combien de prélèvements qui contiennent des boules de couleurs différentes deux à deux peut-on ainsi obtenir ?
- ❹ Combien de prélèvements qui ne contiennent pas de boules rouges peut-on ainsi obtenir ?
- ❺ Combien de prélèvements qui contiennent aux moins deux boules verts peut-on ainsi obtenir ?

Exercice 7

Deux urnes A_1 et A_2 contiennent 7 boules indiscernables au toucher dont quatre blanches et trois noires. on considère l'expérience suivante :

On-y-prélève simultanément deux boules de A_1 et deux boules de A_2 .

- ❶ Combien de prélèvements différents peut-on ainsi obtenir ?
- ❷ Combien de prélèvements qui contiennent des boules de mêmes couleurs peut-on ainsi obtenir ?
- ❸ Combien de prélèvements qui contiennent deux boules de chaque couleur peut-on ainsi obtenir ?
- ❹ Combien de prélèvements qui contiennent trois boules blanches et une noir peut-on ainsi obtenir ?

- ❺ Combien de prélèvements qui contiennent trois boules noires et une blanche peut-on ainsi obtenir ?

Exercice 8

Deux urnes A_1 et A_2 contiennent 7 boules indiscernables au toucher dont quatre blanches et trois noirs. on considère l'expérience suivante :

On prélève une boule de A_1 et on les met dans A_2 puis on prélève simultanément deux boules de A_2 .

- ❶ Représentes l'expérience par un arbre pondéré ?
- ❷ Combien de prélèvements qui contiennent des boules de mêmes couleurs peut-on ainsi obtenir ?
- ❸ Combien de prélèvements qui contiennent deux boules blanches peut-on ainsi obtenir ?
- ❹ Combien de prélèvements qui contiennent deux boules noirs peut-on ainsi obtenir ?

Exercice 9

Un écran de type

LCD de forme rectangulaire a pour dimensions 60cm * 45cm.

La partie principale de l'écran est elle-même représentée par

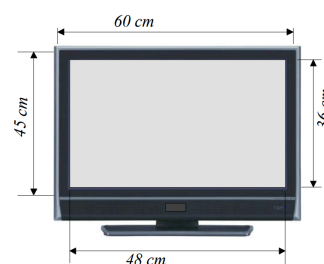
un rectangle de di-

mensions 48cm * 36cm. Sachant qu'un pixel de l'écran est défectueux, détermine la probabilité de l'événement A défini par : "le pixel défectueux se trouve sur la partie principale de l'écran".

Exercice 10

(Deux urnes)

Une urne "A" contient 8 boules indiscernables au toucher : 4 sont noires, 3 sont blanches et une rouge. Une autre urne "B" contient 4 boules indiscernables au toucher : 2 sont noires et 2 sont blanches. **On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne "A" et une de l'urne "B".**



- ❶ Calculer le nombre des cas possibles ?
- ❷ Calculer La probabilité des événements suivants :
- "A" les trois boules sont noires.
- "B" les trois boules sont de même couleur.
- "C" Avoir une seule boule noire.

Exercice 11 (Deux événements incompatibles)

Un sac contient des jetons numérotés comme suite : 1, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5. **On tire un jeton du sac.**

- ❶ Calculer les probabilités des événements suivants ; "1", "2", "3", "4" et "5".
- ❷ (a) Pourquoi les événements "1" et "4" sont-ils incompatibles ?
(b) En déduire $P(\{1\} \cup \{4\})$
- ❸ Déterminer la probabilité de l'évènement "non 1".

Exercice 12 (Un arbre pondéré)

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux noires "N" et trois blanches "B" . On dispose également de deux sacs contenant des jetons : l'un est noir et contient un jeton noire et trois jetons blancs, l'autre est blanc et contient deux jetons noirs et deux jetons blancs. **On extrait une boule de l'urne, puis on tire un jeton dans le sac qui est la même couleur que la boule tirée.**

- ❶ Combien y a-t-il d'issues possibles ? Les explicitez.
- ❷ A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité de chacune de ces issues.
- ❸ Déterminer la probabilité de l'évènement A "la boule et le jeton extraits sont de la même couleur"

Exercice 13

Une urne contient 8 boules indiscernables au tou-

cher : 3 sont blanches numérotées 2-1-1, 2 sont noirs numérotées 4-2 et 3 sont verts numérotées 4-1-1. **On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne .**

- ❶ Calculer La probabilité des événements suivants :
- "A" Avoir trois nombres paires.
- "B" les trois couleurs sont différentes.
- "C" Avoir une seule fois le nombre 2.

Exercice 14

Une urne contient 10 boules numérotées 1-1-1-2-2-2-3-3-4-4. **On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne .**

- ❶ Calculer La probabilité des événements suivants :
- "A" Avoir le nombre '1' au deuxième tirage.
- "B" Avoir le nombre '1' une seule fois exactement.
- "C" Avoir le nombre '1' deux fois.
- "D" Ne pas avoir le nombre '2'.
- "C" Avoir des nombres différents.
- "E" Avoir le nombre '3' deux fois exactement.

Exercice 15 (Probabilité conditionnelle)

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 deux fois.

On considère les événements suivants :

- "A" Avoir le nombre '6' dans la première lance.
- "B" Avoir le nombre '6' dans la deuxième lance.
- "C" La somme des deux nombres obtenus égale à 4.

- ❶ Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ et $p_A(B)$?
- ❷ les événements sont-ils indépendants ?

Exercice 16 (Un dé lancer 5-fois)

On lance un dé équilibré à six faces numérotées 1-1-2-2-3-4 trois fois.

- ❶ Calculer La probabilité des événements suivants :

"A" Avoir le nombre '2' une seule fois exactement.

"B" Avoir le nombre '3' deux fois exactement.

"C" Ne pas avoir le nombre '1'.

❷ Cette fois, On lance ce dé cinq fois Calculer La probabilité des événements suivants :

"D" Avoir le nombre '1' deux fois exactement.

"C" Avoir le nombre '1' au plus une seule fois.

Exercice 17

(Le coureur)

Un coureur traverse un trajectoire qui se compose de 4 obstacles, on suppose que la probabilité qu'un obstacle soit tombé par le coureur est $\frac{1}{5}$.

Calculer La probabilité des événements suivants :

"A" Le coureur fait tomber le 1^{er} obstacle uniquement.

"B" Le coureur ne fait tomber aucun obstacle.

"C" Le coureur fait tomber un seul obstacle.

Exercice 18

(Un exercice de la chasse)

Dans un exercice de la chasse ,quelqu'un tire vers un tableau, on suppose que la probabilité p que cette personne arrive à frapper le tableau est la moitié q qu'elle n'arrive pas .

❶ Calculer p et q

❷ Calculer la probabilité que la personne frappe le tableau seulement au troisième tire.

❸ Calculer la probabilité qu'elle frappe le tableau une fois sur chaque deux tirs.

Exercice 19

(Tirage de n-boules)

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noirs, les boules sont indiscernables au toucher.

❶ On tire aléatoirement une seule boule de l'urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

❷ On tire successivement et avec remise 5 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche deux fois exactement ?

❸ On tire successivement et avec remise n

boules de l'urne.

(a) Montrer que la probabilité d'avoir au moins une boule blanche est : $p = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(b) Quel est le nombre minimal de tirage pour que p soit supérieure ou égale à 0.999 (Hint : $\log_{10}(3) = 0.48$)

Exercice 20

*

Une urne contient 6 boules rouges numérotées 1-2-3-4-5-6 et 6 boules verts numérotées 1-2-3-4-5-6.

I) On tire simultanément 4 boules de l'urne.

❶ Calculer La probabilité des événements suivants :

"A" Parmi les boules tirées il n'y a pas de deux nombres égaux.

II) On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne.

❶ Calculer La probabilité des événements suivants :

"B" Avoir une boule rouge ou bien la deuxième boule porte le numéro '2'.

Exercice 21

On lance une pièce monétaire non trichée 10 fois est soit X la variable aléatoire qui associe chaque résultat par la fréquence du pile.

❶ (a) Déterminer les valeurs de X .

(b) Calculer $P(X = \frac{1}{2})$.

❷ Calculer $P(X \geq \frac{9}{10})$.

Exercice 22

Une urne contient 4 boules blanches numérotées 2-2-0-4 et 3 boules noires numérotées 2-0-4. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne :

❶ Calculer le nombre de cas possibles ?

❷ Calculer La probabilité des événements suivants :

"A" les trois boules sont de même couleur.

"B" la somme des trois nombres tiré égale à 6 .

❸ (a) Calculer La probabilité de l'événement ' $A \cap B$ '.

(b) Quelle est La probabilité de l'événement suivant ? On 'tire 3 boules dont la somme de ces nombres égale à 6 sachant que la première boule tirée est blanche'

Exercice 23

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules rouges. On tire successivement et sans remise 4 boules de l'urne :

❶ Calculer le nombre des cas possibles ?

❷ Calculer La probabilité des événements suivants :

"A" Avoir au moins une boule rouge parmi les boules tirées.

"B" Avoir exactement deux boules rouges.

"C" Avoir exactement deux boules rouges sachant que la deuxième boule tirée est rouge.

Exercice 24

(Examen blanc 2013)

Une urne contient 2 boules rouges et 1 boule bleu.

On tire aléatoirement une boule de l'urne :

- Si la boule tirée et bleu, la boule est ramenée au urne.

- Si la boule tirée et rouge, la boule est laissée à côté de l'urne puis on pose a sa place une boule bleu.

On continue notre tirage de la même façon n fois ($n \geq 2$).

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boule rouge rester dans le sac.

❶ On suppose que $n = 3$.

(a) Déterminer la loi de probabilité associée à X .

(b) Calculer l'espérance mathématique $\mathcal{E}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

❷ On suppose que $n \geq 2$.

(a) Déterminer $X(\Omega)$ et calculer $p(X = 2)$.

(b) Montrer que $p(X = 1) = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(c) Déterminer la loi de probabilité associée à X .

Exercice 25

(Concours de l'Iscae 2014)

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient 3 boules rouges et 5 vertes.

Une urne $\mathcal{U}_2$ contient n boules rouges, 3 vertes et 2 blanches. On tire au hasard une boule de $\mathcal{U}_1$, puis on la jette dans $\mathcal{U}_2$. On tire ensuite au hasard simultanément deux boules de $\mathcal{U}_2$.

Si on tire deux boules rouges de $\mathcal{U}_2$, on gagne 50 dirhams.

Si on tire deux boules vertes de $\mathcal{U}_2$, on gagne 20 dirhams.

Si on tire deux boules blanches de $\mathcal{U}_2$, on gagne 10 dirhams.

Si on tire deux boules de couleurs différentes de $\mathcal{U}_2$, on perd 20 dirhams.

Soit X la variable aléatoire « gain en dirhams à l'issue d'une telle épreuve ». L'espérance de X est :

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \frac{5(4n^2 - 19n - 12)}{4(n+5)(n+6)} & \textcircled{2} \frac{5(4n^2 - 14n - 12)}{4(n+5)(n+6)} \\ \textcircled{3} \frac{5(4n^2 - 17n - 12)}{4(n+5)(n+6)} & \textcircled{4} \frac{5(3n^2 - 19n - 12)}{4(n+5)(n+6)} \end{array}$$

Exercice 26

(Bac 2010 2^{ème} session)

Une urne contient 10 boules blanches et 2 boules rouges. On tire les boules de l'urne l'une après l'autre et avec remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, on s'arrête là.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boule tirée.

❶ (a) Déterminer l'ensemble des valeurs du variable aléatoire X .

(b) Calculer la probabilité de l'évènement $[X = 1]$.

(c) Montrer que $P[X = 2] = \frac{5}{3}$.

(d) Calculer la probabilité de l'évènement $[X = 3]$.

❷ (a) Montrer que $\mathcal{E}(X) = \frac{13}{11}$. (où $\mathcal{E}(X)$ est l'espérance mathématique).

(b) Calculer $\mathcal{E}(X^2)$ puis déduire la variance $\mathcal{V}(X)$.

Exercice 27 (Bac 2017 2^{ème} session)

Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher ($n \in \mathbb{N}$) : n sont noires et n sont blanches. On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne.

On considère le jeu suivant :

- Si la couleur des deux boules tirées est blanche, le joueur gagne 20 point.
- Si les couleurs des deux boules tirées est noire, le joueur perd 20 point.
- Si la couleur des deux boules tirées est différentes, le joueur ne gagnera rien.

❶ Calculer La probabilité où le joueur gagne 20 points perd 20 points et quand il ne gagnera rien.

❷ On répète le jeux précédents 5 fois, calculer la probabilités des évènements suivants :

"A" Le joueur gagne 100 points.

"B" Le joueur gagne 40 points.

❸ Pendant un seul jeu, on considère la variable aléatoire X qui prend la valeur $+20$ si le joueur gagne ou bien -20 si le joueur perdre et 0 si le joueur n'a pas gagné.

(a) Donner la loi probabiliste de la variable aléatoire X .

(b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Exercice 28 (Bac 2016 2nd session)

We have two urns $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$:

- The urn $\mathcal{U}$ contains 4 red balls and 4 blue balls.
- The urn $\mathcal{V}$ contains 2 red balls and 4 blue balls.

We consider the following experiment :

We draw a ball from the urn $\mathcal{U}$ at random : if it is red, we put it in the urn $\mathcal{V}$ then we draw a ball from the urn $\mathcal{V}$ at random : if it is blue we put it aside, then we draw a ball from the urn $\mathcal{V}$ at random.

Let the following events occur :

- $R_{\mathcal{U}}$: The drawn ball from the urn is red
- $B_{\mathcal{U}}$: The drawn ball from the urn is blue
- $R_{\mathcal{V}}$: The drawn ball from the urn is red
- $B_{\mathcal{V}}$: The drawn ball from the urn is blue

❶ Calculate the probabilities of the two events $R_{\mathcal{U}}$ and $B_{\mathcal{U}}$.

❷ (a) Calculate the probability of the events $B_{\mathcal{V}}$ knowing that the event $R_{\mathcal{U}}$ was realized.

(b) Calculate the probability of the events $B_{\mathcal{V}}$ knowing that the event $B_{\mathcal{U}}$ was realized.

❸ Prove that the probability of the event $B_{\mathcal{V}}$ is $\frac{13}{21}$.

❹ Deduce the probability of the event $R_{\mathcal{V}}$.

تمرين 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f_n(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{n}\right) + \sqrt[3]{x}$ لكل n من $\mathbb{N}$

① بين أن f_n تقبل دالة عكسية من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يجب تحديده.

② استنتج أن المعادلة $\arctan\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{n}\right) + \sqrt[3]{x} = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

تمرين 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x) = \tan^2(x) - 2\sqrt{3}\tan(x)$

① حدد D_f ثم ادرس رتبة الدالة f على المجال $D_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ مع $k \in \mathbb{Z}$

② لتكن f_k قصور الدالة f على المجال $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right[$. بين أن f_k تقابل من I_k نحو مجال J يجب تحديده، ثم حدد تقابلها العكسي.

③ لتكن g_k قصور الدالة f على المجال $K_k = \left] \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$. بين أن g_k تقابل من K_k نحو مجال L يجب تحديده، ثم حدد تقابله العكسي.

تمرين 3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left] -\infty, \frac{\pi}{2} \right[$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} - \sqrt[3]{x^2} & ; x \in]-\infty, 0[\\ \arctan(\sqrt{\tan(x)}) & ; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

① بين أن f متصلة في 0.

② أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

③ نضع $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ، بين أن f تقابل من I نحو I .

④ (أ) حل في I المعادلة $f^{-1}(x) = x$.

(ب) حل في I المتراجحة $f^{-1}(x) > x$.

⑤ ليكن $\beta \in]0, 1[$. نعتبر الدالة العددية $g(x) := f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. ($\forall x \in I$)

بين أن g متصلة و تناقصية قطعاً على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

⑥ ليكن $x \in I$

(a) بين أن :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \beta f(x) ; (\exists! y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[)$$

(b) بين أن : $y \geq \frac{\pi}{2} - x$

(c) بين أن $x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} - x$

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

الجزء I

نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي $g_n(x) = x^{n+1} + x^n + x - 1$.

① بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا v_n على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن $0 < v_n < 1$.

② بين أن $(\forall x \in]0, 1[) g_{n+1}(x) < g_n(x)$. ثم استنتج رتبة المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$.

الجزء II

① بين أن $(\forall x > 0) \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

② باستعمال رتبة دالة قوس الظل، بين أن $(\forall x < 0) \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

③ بين أن $(\forall x \in]0, 1[) \sqrt[n]{x} < \sqrt[n+1]{x}$.

الجزء III

نعتبر المتتالية العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ:

$$\begin{cases} f_n(x) = \arctan(\sqrt[n]{x}) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{4}; x > 0 \\ f_n(0) = -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

مع $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = x$

① باستعمال السؤال I.1، بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\frac{\pi}{4}$ و أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{3\pi}{4}$.

② بين أن f_n متصلة على $\mathbb{R}^+$.

③ بين أن f_n تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$ (يمكن استعمال 2 من الجزء الثاني).

④ استنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n من $\mathbb{R}^{*+}$.

⑤ حدد u_1 ، ثم بين أن $0 < u_n < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

⑥ باستعمال نتائج الجزء II، بين أن $(\forall x \in]0, 1[) f_n(x) < f_{n+1}(x)$.

⑦ بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعاً.

الجزء IV

① بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n = (v_n)^n$ و $\frac{2}{1+v_n} = 1 + u_n$.

② استنتج مرة أخرى رتبة المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$.

تمارين 1	8pnt
أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها ① احسب ما يلي : $B = \arctan \left(\tan \left(-\frac{32\pi}{5} \right) \right)$ و $A = \arctan \left(\tan \left(\frac{32\pi}{5} \right) \right)$ ② بين أن : $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$ ③ احسب النهايات التالية: (i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}}{x - a}$ مع $a > 0$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[2021]{x} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt[2022]{x}} \right)$ (iii) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\arctan(\sqrt[3]{x-8})}{\sqrt[3]{x}-2}$ ④ (a) احسب : $C = \arctan(n+1) - \arctan(n)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$. (b) استنتج المجموع $D = \sum_{k=0}^n \arctan \left(\frac{1}{1+k+k^2} \right)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$. ⑤ باستعمال تعريف نهاية متتالية عددية بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$.	1 1 1 1 1 1 1 1
تمارين 2	4pnt
نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = x^n - nx + 1$. ① بين أنه لكل $n \geq 3$ المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n من $]0, 1[$. حدد قيمة x_2. ② بين أن لكل $n \geq 3$ لدينا : $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}$ ③ بين أن لكل $n \geq 3$: $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$; $(\forall x \in]0, 1[)$. ④ استنتج رتبة المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$.	1, 5 1 1 0, 5
تمارين 3	+2pnt
ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$ و لتكن f دالة معرفة و متصلة من $[a, b]$ نحو $[a, b]$. اثبت أن الدالة f تقبل نقطة صامدة من $[a, b]$ يعني أن $(\exists \alpha \in [a, b]) : f(\alpha) = \alpha$	

ليكن a عدد حقيقي و f دالة عددية معرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \operatorname{arcatn}\left(\frac{1}{x}\right) & ; x > 0 \\ \arctan(-x) + \sqrt[3]{-x} + a & ; -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt[3]{1-x^3} + x & ; x < -1 \end{cases}$$

① حدد D_f .

1

② احسب نهايات الدالة عند محددات D_f .

1

③ (a) حسب قيم a ادرس اتصال f في 0.

1

(b) حدد قيمة a التي من أجلها تكون f متصلة في -1.

1

(c) بين أن f متصلة على المجال $]-\infty, -1[$.

1

④ بين أن : $(\forall x > 0) : f(x) = \frac{\pi}{2}$.

1

⑤ في هذا السؤال نفترض أن $a = -\frac{\pi}{4}$ و نعتبر g قصور الدالة f على $[-1, 0]$.

(a) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا α على $]-1, 0[$.

1

(b) بين أن g تقابل من $[-1, 0]$ نحو مجال J يتم تحديده.

1



Scanner le code QR après 12 :30.

الجزء 1

1 باستخدام مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن :

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (\forall x > 0)$$

2 استنتج أن : $x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2} \quad (\forall x < 0)$ 0, 5

3 حدد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arctan x - x}{x^2}$ 0, 5

الجزء 2

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right) \arctan x & ; x > 0 \\ 1 - x^2 \arctan \frac{1}{x} & ; x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

1 اثبت أن f متصلة في 0. 1

2 بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 1

3 (a) ادرس قابلية اشتقاق f على يسار 0. 0, 5

(b) باستخدام الجزء 1 ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 0. ثم استنتج تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. 1

4 لتكن h الدالة المعرفة بما يلي :

$$h(x) = \frac{x}{1+x^2} - 2 \arctan \frac{1}{x} \quad (\forall x < 0)$$

(a) اعط جدول تغيرات الدالة h على $]-\infty, 0[$ ثم استنتج أن : 1, 5

$$(\forall x < 0) : 0 < h(x) < \pi$$

(b) تحقق من أن $f'(x) = xh(x) \quad (\forall x < 0)$. 0, 5

5 (a) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم باستخدام الجزء 1-1 (a) بين 1, 5

$$\text{أن : } f'(x) > 0 \quad (\forall x > 0)$$

(b) اعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$. 0, 5

6 لتكن g قصور الدالة f على $\mathbb{R}^-$, بين أن g تقابل من $\mathbb{R}^-$ نحو مجال J يتم تحديده. 1

1	7 باستخدام الجزء 1-1 (c) بين أن (C_f) تقبل مقارب مائل معادلته $y = 1 - x$ بجوار $-\infty$.
1, 5	8 بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2}) = -1$ ثم استنتج أن المستقيم (Δ) : $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.
2	9 انشئ المنحيان (C_f) و $(C_{g^{-1}})$ في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ مع $(\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2cm)$
الجزء 3	
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :	
$\begin{cases} u_0 \in]-1, 0[\\ u_{n+1} := -\frac{1}{4}f(u_n) \end{cases}$	
1	1 اثبت أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) -1 < u_n < 0$.
0, 5	2 بين أن المعادلة $f(x) = -4x$ تقبل حلا وحيدا α في $] -1, 0[$.
1, 5	3 بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - \alpha \leq \frac{\pi}{4} u_n - \alpha $
1	4 (a) استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها.
1	(b) اعط تقريبا لـ α بالدقة (10^{-1}) .

تمرين 1

(3pnt)

احسب النهايات التالية :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1} - x^5 & \quad \textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 \ln x}{(\ln x)^2 + \ln(x^2)} & \textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} \\ \textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 + (\ln x)^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - x}{\ln x} & \textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right) \end{aligned}$$

تمرين 2

(5, 5pnt)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x) = 2xe^x$ $\textcircled{1}$ (a) أثبت أن f تقابل من $[0, 1]$ نحو مجال J يتم تحديده.(b) لتكن f^{-1} التقابل العكسي لـ f ، اعط جدول تغيرات f^{-1} . $\textcircled{2}$ بين أنه يوجد عنصر وحيد α من $]0, 1[$ بحيث $\alpha e^\alpha = 1$. $\textcircled{3}$ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :(a) بين أن $(\forall n \geq 0) u_n \in]0, 1[$.(b) اثبت أن $(\forall x \in [0, 1]) f(x) \geq x$.(c) استنتج أن المتتالية (u_n) تناقصية .(d) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و أن نهايتها هي 0. $\textcircled{4}$ لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.(a) بين أن : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}} (\forall n \geq 0)$.(b) استنتج أن $u_n = \alpha \frac{e^{-S_n + \alpha}}{2^n} (\forall n \geq 0)$.(c) اثبت أن $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\forall n \leq 0)$.(d) استنتج أن المتتالية (S_n) متقاربة نحو l و تحقق من أن $\alpha \leq l \leq 2$.

الجزء 1

لتكن g المتتالية المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بـ $g(x) = \ln^3(x) - \ln^2(x) + \ln(x) + 1$
 ① تحقق من أن g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن

$$\forall x > 0 : g'(x) = \frac{3 \ln^2(x) - 2 \ln(x) + 1}{x}$$

② بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

③ اعط جدول تغيرات g .

④ استنتج أن g تقابل من $\mathbb{R}^{*+}$ نحو $\mathbb{R}$.

⑤ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $\mathbb{R}^{*+}$ و أن $\alpha \in]\frac{1}{e}, 1[$ (1p)

⑥ استنتج جدول اشارة g على $]0, +\infty[$.

الجزء 2

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{1 + \ln^2 x} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 & x = 0 \end{cases}$$

① بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$ ، ثم اعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها. (1p)

② بين أن f متصلة على يمين 0.

③ ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 0، ثم اعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها. (1p)

④ اثبت أن $\forall x > 0 : f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + \ln^2(x))^2}$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة f . (1p)

⑤ اعط معادلة المماس (T) لـ (C_f) في النقطة $A(1, 0)$.

⑥ انشئ (C_f) و (T) مع $\alpha \simeq 0.6$ و $f(\alpha) \simeq -0.25$ (1p).

الجزء 3

① بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$: المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n \in [1, +\infty[$.

② تحقق من أن $\forall t \in [1, +\infty[: f(t) \leq \frac{1}{2}t$ ثم استنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}^* : \alpha_n \geq 2n$ (1p).

③ اثبت أن لكل $n \in \mathbb{N}^* : \ln(\sqrt[n]{\alpha_n}) = \frac{1 + \ln^2(\alpha_n)}{\alpha_n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$ (1p).

④ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{\alpha_n} - 1)$.

تمارين 1		8pnt
(I) في المعلم العقدي، نعتبر النقطتين $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $z' = \frac{1}{2}(1+i)(z + \bar{z})$		
① علما أن $z = x + iy$ اعط الشكل الجبري للعدد العقدي z' .		1
② نضع $A(1+i)$ ، بين أن O, A و M' نقط مستقيمة		1
③ بين أن $z' - z$ تخيلي صرف		1
④ حدد ثم أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ بحيث		
$ z - 1 - i = 4 - 3i : (E_2) \quad z - 1 - i = i\bar{z} : (E_1)$		3
(II) ليكن z و u من $\mathbb{C}$ مع $u \neq 1$ نضع $w = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$		
① بين أنه اذا كان $ u = 1$ فإن $w \in IR$		1
② بين أن $w \in \mathbb{R} \Rightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } u = 1)$		1
تمارين 2		12pnt
نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:		
$f(x) = 2x + \ln x + \arctan(\sqrt{x})$		
الجزء 1		
① بين أن f دالة متصلة على $]0, +\infty[$.		0, 5
② احسب نهايات f عند محداث D_f ثم أعط الفروع الانتهائية.		1
③ أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$.		0, 5
ب) احسب f' ثم اعط جدول التغيرات.		1
ج) بين أن $(\forall x \in]0, +\infty[), f'(x) > 2$.		1
④ بين أن f تقابل من $]0, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده.		1
⑤ أ) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0, +\infty[$.		1
ب) بين أن $(\forall x \in [\alpha, +\infty[), f(x) \geq x$.		1
⑥ أنشئ C_f و $C_{f^{-1}}$ في نفس المعلم.		2
الجزء 2		
نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :		
$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in]\alpha, +\infty[\end{cases}$		
① بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > \alpha$.		1
② بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية.		2
③ بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.		

تمرين 1

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و لتكن f_n دالة معرقة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f_n(x) = -nx + \ln(x)$ و (C_n) منحناها في مهمم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$. (1pt)

(b) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*; f'_n(x) = \frac{-nx + 1}{x}$ ثم اعط جدول تغيرات f_n . (1pt)

(c) ادرس الفروع الانتهائية ل C_n . (1pt)

(d) انشئ C_1 و C_2 . (1pt)

(2) (a) بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^*; 2x - 1 > \ln(x)$. (1pt)

(b) بين ان المعادلة $f_n(x) = -2n$: (E) تقبل حلين بالضبط a_n و b_n بحيث : $0 < a_n < \frac{1}{n}$ و $b_n > 2$. (2pt)

(3) احسب نهاية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ثم بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e^2}$. (1pt)

(4) (a) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*; f_{n+1}(b_n) < -2(n+1)$ ثم استنتج رتبة $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. (1pt)

(b) بين أن $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(b_n - 2)}{\ln(2)}$. (1pt)

تمرين 2

الجزء الأول

ليكن $m \in \mathbb{C}$ و نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(1+i)z^2 - 2i(m+1)z - (1-i)(m^2 + 1) = 0$: (E_m)

نرمز ب z_1 و z_2 حلي المعادلة z_1 يكون عددا حقيقيا اذا كان $m = 0$

١ - ليكن Δ مميز المعادلة $\Delta = (2(m-1))^2$ ، بين أن $z_1 = 1 + im$ و $z_2 = m + i$. (2pt)

٢ - اوجد قيم m التي من أجلها $z_1 z_2 = 1$. (1pt)

(3) بين أن $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$. (1pt)

(4) بين أنه اذا كان $m \in \mathbb{C} - \{i, -i\}$ فإن $|m| = 1 \Leftrightarrow \arg(z_1) \equiv \arg(z_2) [\pi]$. (1pt)

(5) نفترض أن $m = e^{i\theta}$ اكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 مع $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. (2pt)

الجزء الثاني

المستوى العقدي منسوب الى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

نعتبر النقط $A(m), A_1(z_1), A_2(z_2)$ و $\Omega(1+i)$.

(1) بين ان $A_2(z_2)$ صورة $A_1(z_1)$ بالدوران الذي مركزه $\Omega(1+i)$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$. (1pt)

(2) نفترض أن $m \in \mathbb{C} - \left\{1, \frac{1}{2}(1+i)\right\}$ و $\text{Re}(m) = \text{Im}(m)$.

(a) بين أن $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \in i\mathbb{R}$. (1pt)

(b) استنتج أن النقط $A(m), A_1(z_1), A_2(z_2)$ و $\Omega(1+i)$ متداورة. (1pt)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f_n(x) = (x-1)^n \ln x$

الجزء 1 (5,7ن)

نضع $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad h_n(x) = n \ln x + 1 - \frac{1}{x}$

1, 5 (أ) ادرس تغيرات h_n على $\mathbb{R}_+^*$

0, 5 (ب) أحسب $h_n(1)$ و استنتج إشارة $(x-1)h_n(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

0, 5 (2 أ) بين أن $(\forall x > 0), f'_n(x) = (x-1)^{n-1}h_n(x)$

1 (ب) ادرس حسب زوجية n تغيرات f_n على $\mathbb{R}_+^*$

1 (ج) ادرس الفروع اللانهاية للمنحنى (C_n) . (C_n) هو منحنى الدالة f_n

1 (د) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) حسب زوجية n

1, 5 (3) انشئ (C_1) و (C_2) في نفس المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

1, 5 (4) احسب مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$

الجزء 2 (10ن)

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ بما يلي : $F(0) = 0$ و $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{f_1(t)}{(t-1)^4} dt$

1 (1) اثبت أن $\forall x \in]0, 1[$ لدينا : $2 \ln(x) \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3} \leq F(x) \leq \ln(x) \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3}$

0, 75 (2 أ) احسب التكامل $\int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3}$

0, 75 (ب) استنتج أن $\forall x \in]0, 1[$ لدينا : $\frac{(x^2+2x) \ln x}{(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x) \ln x}{2(x^2-1)^2}$

0, 5 (ج) ادرس اتصال F على يمين 0.

1 (د) احسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا

1 (هـ) ادرس اشتقاق F على يمين 0 ثم أول النتيجة هندسيا.

1 (3 أ) بين أن لكل $x > 1$ لدينا : $\frac{(x^2+2x) \ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x) \ln x}{(x^2-1)^2}$

1 (ب) استنتج النهايات : $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0, 5 (4 أ) ادرس اشتقاق F على كل من المجالين $]0, 1[$ و $]1, +\infty[$

1, 5 (ب) اعط جدول تغيرات F (لاحظ أن لكل x من $\mathbb{R}_+$ $x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0$)

1 (5) ارسم المنحنى (C_F) في م.م.م $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

الجزء 3 (5,2ن)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_1^2 f_n(t) dt$

1 (1) اثبت أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (n+1)I_n = \ln(2) - \int_1^2 \frac{(t-1)^{n+1}}{t} dt$

1 (2 أ) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{1}{2(n+2)} \leq \ln(2) - (n+1)I_n \leq \frac{1}{n+2}$

0, 5 (ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n$ ثم استنتج تكافؤا لـ I_n بجوار $+\infty$

تمرين 1

(13pnt)

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \ln(1 + e^{-t}) dt, & x \neq 0 \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$$

لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب

(1) بين أن $D_F = \mathbb{R}$

2. بين أن $\forall t \in \mathbb{R} : \ln(1 + e^t) = t + \ln(1 + e^{-t})$ ثم استنتج باستعمال المكاملة بالأجزاء أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(-x) = \frac{x}{2} + F(x)$$

3. باستعمال مبرهنة المتوسط لبيّن أن $\forall x > 0 : \ln(1 + e^{-x}) \leq F(x) \leq \ln(2)$

4. استنتج أن F دالة متصلة في $\cdot$.

5. بين أن $\forall u > 0 : \ln(1 + u) \leq u$ ثم استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

6. باستعمال السؤالين (2) و (5) بين أن المستقيم $(D) : y = -\frac{x}{2}$ مقارب لـ (C_F) بجوار $-\infty$.

7. ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ تحقق من أن :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{1}{x^2} \int_0^x \ln\left(\frac{1 + e^{-t}}{2}\right) dt$$

8. لتكن G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $G(x) = \int_0^x \ln\left(\frac{1 + e^{-t}}{2}\right) dt$

(a) اثبت أن G قابلة للاشتقاق مرتين $\mathbb{R}$ و أن $G(0) = G'(0) = 0$ و

$$\forall x \in \mathbb{R} : G''(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$$

(b) ليكن $x > 0$ نعتبر الدالة φ المعرفة على $[0, x]$

ب

$$\begin{cases} \varphi(t) = G(t) - \frac{1}{2}At^2, & t \neq x \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

بتطبيق مبرهنة رول على الدالة φ ثم على الدالة φ' على المجال $[0, x]$ بين أن

$$\exists c \in]0, x[: G''(c) = A$$

(c) استنتج أن $\frac{G(x)}{x^2} = \frac{-1}{2(e^c + 1)}$ $\exists c \in]0, x[$

(d) بين أن F قابلة للاشتقاق في 0 و أن $F'(0) = \frac{-1}{4}$

9. بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و على $\mathbb{R}^{*-}$ و أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : xF'(x) = \ln(1 + e^{-x}) - F(x)$$

10. اعط جدول تغيرات F

تمرين 2

(7pnt)

نعتبر a و b و c أعداد من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث $a^2 = b^2 + c^2$ و لتكن $\theta \in]0, 2\pi[$

الجزء 1

نضع $p = a \cos \theta + bi \sin \theta$ و نعتبر المعادلة : $z^2 - 2pz + c^2 = 0$

1. تحقق من أن $p^2 - c^2 = (b \cos \theta + ia \sin \theta)^2$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) نرمز ل z_1

و z_2 حلي المعادلة (E)

2. لتكن $F(c)$, $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, و $F'(-c)$ بين أن $\frac{z_2 + c}{z_2 - c} = -\frac{z_1 + c}{z_1 - c}$ ثم استنتج أن

النقط M_1, M_2, F, F' متداورة

الجزء 2

في هذا الجزء نعتبر النقط A و $D(b + ic)$ و $B(-a)$, $C(a)$ مماثل D بالنسبة ل المحاور التخييلي $(O, \vec{v})$,

1. بين أن $z_A = -b + ic$

2. ليكن R الدوران الذي مركزه C و زاويته θ , نضع $A' = R(A)$ و $B' = R(B)$.

بين أن $z_{B'} = a(1 - 2e^{i\theta})$ و $z_{A'} = a(1 - e^{i\theta}) + (-b + ic)e^{i\theta}$

3. نرمز ب I و J منتصفي القطعتين $[A'D]$ و $[B'C]$ على التوالي.

$$\frac{z_I}{z_J} = \frac{a+b}{2a} + i \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \cdot \frac{c}{2a}$$

(a) بين أن $O \in (IJ)$ استنتج أن

Exercice 1 (4p)

1) a/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $21^n \equiv 1 + 20n[100]$.

b/ En déduire les deux derniers chiffres de l'entier 2021^{2022} .

On note E l'ensemble des entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n \equiv 1 + n(x - 1)[100].$$

2) Vérifier que 21 est un élément de E .

3) Soit x un élément de E .

a/ Montrer que $(x - 1)^2 \equiv 0[100]$.

b) En déduire que $x \equiv 1[10]$.

4) Soit $q \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + 10q)^n \equiv 1 + 10nq[100]$.

5) Déterminer l'ensemble E .

Exercice 2 (6p) 1) Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b/ Montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$.

c/ Dresser le tableau de variation de φ .

d/ Tracer la courbe (C_f) , en précisant l'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

2) Soit φ_n la fonction définie sur $] -n, +\infty[$ par $\varphi_n(x) = \frac{1 + \ln(x + n)}{x + n}$. On désigne par (C_n) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a/ En remarquant que $\varphi_n(x) = \varphi(x + n)$, montrer que (C_n) est image de (C) par une translation que l'on précisera.

b/ Tracer (C_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Soit h_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$.

a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $h_n(x) < 0$.

b/ Montrer que pour tout x de $]0, 1]$, $h'_n(x) < 0$. cl En déduire que l'équation $h_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution α_n et vérifier que $\frac{1}{e} < \alpha_n < 1$.

4) a/ Montrer que $n + 1 + a_{n+1} > n + a_n$.

b/ Comparer $\varphi(\alpha_{n+1})$ et $\varphi(\alpha_n)$.

c/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite. d/ Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$. En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 3 (5p) 1) Soit F et H les fonctions définies sur $[0, +\infty$ par

$$F(x) = \int_1^x e^{-\sqrt{t}} dt \text{ et } H(x) = \frac{4}{e} - 2(1 + \sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}.$$

a/ Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty$, et donner $F'(x)$.

b/ Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = H(x)$.

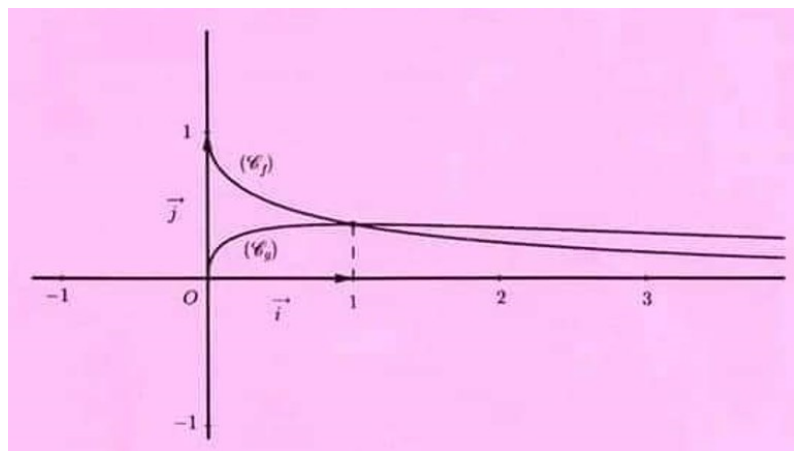
c/ En déduire que $F(0) = H(0)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[0, +\infty$ par $G(x) = \int_1^x \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} dt$.

a/ En remarquant que pour tout $t > 0$, $\sqrt{t} = \frac{t}{\sqrt{t}}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que $G(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$, pour tout $x > 0$.

b/ Justifier que $G(0) = \frac{2}{e} + 2F(0)$.

3) Ci-dessous on a tracé les deux fonctions C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $[0, +\infty$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$.



Pour tout $\lambda \geq 1$, on désigne par A_λ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par (C_f) , (C_g) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

a/ Montrer que $A_1 = \frac{6}{e} - 2$.

b/ Montrer que pour tout $\lambda > 1$, $A_\lambda = A_1 + G(\lambda) - F(\lambda)$.

c/ Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$.

Exercice 4 (5p)

Le plan est rapportée à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3}).$$

1) Montrer que f est une similitude dont le centre Ω a pour affixe i . En déterminer le rapport et l'angle.

2) Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.

Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $(\vec{e}_1; \overrightarrow{\Omega M_0})$.

3) On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n .

a/ Placer les points Ω , M_0 , M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .

b/ Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n , l'égalité :

$$z_n - i = 2^n e^{i \frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i).$$

c/ Pour tout entier naturel n , calculer ΩM_n , puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

3) a/ On considère l'équation $(E) : 7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifiée que le couple $(-5 ; -3)$ est solution, résoudre l'équation (E) .

b/ Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\text{Im}(z) = 1$ et $\text{Re}(z) \geq 0$.

Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

c/ Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{e}_1$. Préciser son plus petit élément.

تمرين 1

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $a_n = 2.7^n + 3.5^n - 5$

(1) a - بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*; a_{n+1} \equiv a_n[24]$

b - استنتج : $\forall n \in \mathbb{N}^*; a_n \equiv 0[24]$

(2) ليكن p عدد أولي موجب بحيث $p > 7$

a - بين أن $a_{p-1} \equiv 0[p]$

b - استنتج أن a_{p-1} قابل القسمة على $24p$

(3) في $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المعادلة $(E) : a_3x - a_2y = 5a_1$

a - بين أن المعادلة (E) تكافئ $44x - 7y = 5$

b - حل المعادلة (E) مع تحديد مراحل الحل.

c - حدد الزوج $(x; y)$ حل ل (E) ؛ بحيث $x \wedge y = 1$

تمرين 2

ليكن q عدد حقيقي ، نعتبر المجموعة $E = \left\{ M(x; y) = \begin{pmatrix} x & y \\ qy & x \end{pmatrix} / (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

(1) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

(2) نفترض أن $q < 0$ و نضع $w = i\sqrt{-q}$

a - تحقق من أن $z = x + wy$ $(\forall z \in \mathbb{C}) (\exists! (x; y) \in \mathbb{R}^2)$

b - بين أن التطبيق φ المعرف من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* ر $\varphi(z) = \varphi(x + wy) = M(x; y)$ تشاكل

تقابلي من $(\mathbb{C}^*; \times)$ نحو $(E^*; \times)$.

c - استنتج بنية $(E^*; \times)$

d - حدد مقلوب كل عنصر $M(x; y)$ من $(E^*; \times)$

(3) نفترض أن $q \geq 0$

a - تحقق أن $M(\sqrt{q}; 1) \times M(-\sqrt{q}; 1) = \theta$

b - هل $(E^*; \times)$ زمرة ؟ لماذا.

تمرين 3

ليكن $m \in \mathbb{C}^*$ ، نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : \frac{1}{m}z^2 + (1 - 3i)z - 4m = 0$

(1)a - حدد الجذرين المربعين ل $a = 8 - 6i$

b - حدد بدلالة m الحلين z_1 و z_2 للمعادلة (E) بحيث $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$

c - ليكن θ عمدة m

احسب بدلالة θ ، $\arg(z_1)$ و $\arg(z_2)$

(2) في معلم عقدي م.م.م $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط

M_1 و M_2 و M و D التي ألقاها على التوالي

$z_D = 1 + 3i$ و z و z_2 و z_1

a - بين أن المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O

b - حدد مجموعة النقط M بحيث O و M و D نقط مستقيمة.

c - حدد مجموعة النقط M بحيث المثلث OMD قائم الزاوية في O

(3) النقطة M'_1 هي صورة M_1 بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و النقطة M'_2 هي

صورة M_2 بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

a - بين أن النقط M_1 و M_2 و M'_1 و M'_2 متداوئة.

b - حدد بدلالة m لحق Ω مركز الدائرة التي تمر من النقط M_1 و M_2 و M'_1 و M'_2

تمرين 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f_n(x) = \ln(x) - \frac{n}{x}$ et soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1)a - Etudier les branches infinies de la courbe (C_n)

b - Etudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^{*+}$, puis donner son tableau de variations

c - Construire la courbe (C_2)

(2)a - Montrer que la fonction f_n est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ vers $\mathbb{R}$

b - En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists ! a_n \in \mathbb{R}^{*+}) ; f_n(a_n) = 0$

c - Comparer les deux fonctions f_n et f_{n+1} sur $\mathbb{R}^{*+}$ en déduire la monotonie de la suite $(a_n)_{n>0}$

d - Montrer que $\forall x > 0; \ln(x) < x$ en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \cdot \int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(x) dx$

a - Montrer : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists c_n \in [a_n; a_{n+1}]) ; f(c_n) = I_n$

b - Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{a_{n+1}}$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

تمرين 1

11, 5pnt

الجزء 1 (4, 25)

$$\begin{cases} U(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ U(0) = 1 \end{cases}$$

لتكن U الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

1 أثبت أن الدالة U متصلة على $\mathbb{R}^+$ و احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x)$ 0, 5

2 ليكن x عدد حقيقي موجب قطعاً.

أ) باستعمال مكاملة بالاجزاء مرتين أثبت أن : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \int_0^1 (1-t)^2 e^{tx} dt$ 0, 5

ب) أثبت أن $\int_0^1 (1-t)^2 e^{tx} dt \leq \int_0^1 e^{tx} dt$ و استنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ 0, 5

3 أثبت أن الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و أن $U'_d(0) = -\frac{1}{2}$ 0, 25

4 أثبت أنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \left(U'(x) = (1 - x - e^{-x}) \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \right)$ 0, 5

5 أثبت أنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) (e^{-x} \geq 1 - x)$ و اعط جدول تغيرات الدالة U . 0, 5

6 حل في $\mathbb{R}^{+*}$ المعادلة $U(x) = x$ 0, 25

7 نعتبر المتتالية العددية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $\begin{cases} a_{n+1} = U(a_n) \\ a_0 = 0 \end{cases}$

أ) نقبل أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) (U''(x) > 0)$ بين أن $\left(|U'(x)| \leq \frac{1}{2} \right) (\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$ و أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) (0 < U(x) \leq 1)$ 0, 5

ب) أثبت أنه $\left(|a_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |a_n - \ln 2| \right) (\forall n \in \mathbb{N})$ 0, 5

ج) أثبت أن المتتالية (a_n) متقاربة و احسب نهايتها. 0, 25

الجزء 2 (5, 25)

$$\begin{cases} f(x) = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \ln(U(x)) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في المستوى المنسوب الى م.م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1 أثبت أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 0, 5

2 أثبت أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) (f(x) = \ln x - \ln(1 - e^{-x}) - x)$ و استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ 0, 75

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة.

3 أثبت أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$. 0, 5

4 أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0. (يمكن استعمال السؤال 3 الجزء 1) 0, 5

5 أثبت أنه لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\begin{cases} f'(x) = e^x \frac{(1 - 2e^{2x})}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \text{ si } x < 0 \\ f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)} \text{ si } x > 0 \end{cases}$ 0, 5

0, 5	6 اعط جدول تغيرات الدالة f .
0, 25	7 ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left] -\infty, -\frac{\ln 2}{2} \right]$ أ) أثبت أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده. ب) حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .
0, 5	8 أنشئ المنحنيان (C_f) و (C_g^{-1}) في نفس المعلم. (نأخذ $\frac{\ln 2}{2} \approx 0,35$)
0, 25	9 ليكن Δ حيز المستوى المحصور بالمنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين ذو المعادلة $x = -\ln 2$ و $x = -\frac{\ln 2}{2}$ أ) احسب التكامل : $\int_{-\ln 2}^{-\frac{\ln 2}{2}} f(t)dt$ يمكن وضع $e^t = \sin x$ ب) استنتج مساحة الحيز Δ .
	الجزء 3 (2ن)
	لتكن G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt & \text{si } x > 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$
0, 25	1 تحقق أن الدالة G معرفة لكل x من $\mathbb{R}^+$.
0, 25	2 أثبت أن $x \ln \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) \leq G(x) \leq x \ln \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$
0, 25	3 استنتج أن G متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$.
0, 25	4 احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.
0, 5	5 أثبت أن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ و أثبت أن $(\forall x > 0) \left(G'(x) = \ln \left(\frac{4x}{(e^x + 1)^2(e^x - 1)} \right) \right)$
0, 5	6 نقبل أن $(\forall x > 0) ((e^x + 1)^2(e^x - 1) > 4x)$. اعط جدول تغيرات الدالة G .
5, 5pnt	تمرين 2
	الجزء 1 (1ن)
	ليكن $m \in \mathbb{C}$ نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :
0, 5	$(E_m) : z^2 - (1 + 2m + im)z + 2m(1 + im) = 0$ 1 تحقق من أن مميز المعادلة هو : $\Delta = (1 - 2m + im)^2$
0, 5	2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) .
	الجزء 2 (4, 5ن)
	المستوى العقدي (P) منسوب الى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي $-i$ و $b = \frac{2m}{1 + im}$ و m مع $m \neq i$
0, 5	1 أ) بين أن : $ m ^2 = \text{Im}(m)$ $\Leftrightarrow b \in \mathbb{R}$
0, 5	ب) استنتج مجموعة النقط $M(m)$ بحيث $b \in \mathbb{R}$

0, 5	② بين أن النقط A و M و O مستقيمية اذا و فقط اذا كان $m \in i\mathbb{R}$.
0, 5	ب) أثبت أنه اذا كان $m \neq 0$ فإن $\frac{b+i}{b} = \frac{m+i}{2m}$.
0, 5	ج) استنتج أنه اذا كان $m \notin i\mathbb{R}$ فإن النقط A و B و O و M متداورة.
	③ نعتبر f التطبيق المعرف من $(P) - \{O\}$ نحو (P) و الذي يحول $M'(z')$ إلى $M''(z'')$ بحيث $z'' = (1 + im)z'$.
0, 5	أ) حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون التطبيق f دورانا.
0, 5	ب) علما أن f دوران بين أنه اذا كان $z' \neq 0$ فإن $z'' \neq z'$.
1	ج) علما ان $(OM') \perp (M'M'')$. بين أن $m \in \mathbb{R}$ و أن $1 + im = \sqrt{1 + m^2}e^{i \arctan(m)}$.
3pnt	تمرين 3 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية $2z^2(1 - \cos(2\theta)) - 2z \sin(2\theta) + 1 = 0$: (E) حيث $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. ① حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E). 1 ② اكتب على الشكل المثلثي العددين z_1 و z_2 (ناقش حسب قيم θ). 1 ③ نعتبر النقط $I(\frac{1}{2 \sin \theta})$ و $A(\frac{e^{-i\theta}}{2 \sin \theta})$ و $B(\frac{e^{i\theta}}{2 \sin \theta})$. أ) حدد المجموعة (Γ) للأعداد الحقيقية θ من $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بحيث يكون المثلث OAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في O. 0, 5 ب) اعط الكتابة العقدي للدوران الذي مركزه I و يحول A الى B. 0, 5



بالتوفيق

تمرين 1

(3pnt)

- نعتبر كيسا U_1 يحتوي على كرتين تحملان الرقم 1 ، و أربع كرات تحمل الرقم 2 .
 - نعتبر كيسا آخر U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و أربع كرات خضراء.
 جميع هذه الكرات لا يمكن التمييز بينها في اللمس.

نسحب، عشوائيا، كرة واحدة من الكيس U_1

(1) احسب احتمال الأحداث التالية :

A : الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1

B : الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2

(2) نعتبر التجربة الآتية :

نسحب كرة من الكيس U_1 ثم نسجل رقمها :

- اذا كان الرقم المسجل 1 ، نسحب كرة واحد من U_2

- اذا كان الرقم المسجل 2 ، نسحب كرتين في ان واحد من U_2

(a) بين ان $p(E_1) = \frac{11}{21}$ و $p(E_2) = \frac{2}{21}$ مع

E_1 : 'الحصول على كرة حمراء واحدة فقط'

E_2 : 'الحصول على كرتين حمراوين'

(b) احسب احتمال الحصول على كرة من U_1 تحمل الرقم 1 علما اننا حصلنا على كرة حمراء من U_2 .

تمرين 2

(3, 5pnt)

الجزء 1

نعرف في $\mathbb{C}$ قانونا تركيبيا داخليا $*$ ب $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 : a * b = a + b - i$

(1) بين أن $(\mathbb{C}, *)$ زمرة متبادلة ذات العنصر المحايد i

(2) نعرف في $\mathbb{C}$ الفانون T ب $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 : aTb = a + b + iab$ و ليكن f التطبيق

$$f : \begin{aligned} \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C}^* - \{i\} \\ z &\mapsto i(1 - z) \end{aligned}$$

(a) بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, X)$ نحو $(\mathbb{C} - \{i\}, T)$ ثم استنتج أن $(\mathbb{C} - \{i\}, T)$ زمرة تبادلية

(b) بين أن $(\mathbb{C}, \star, T)$ جسم تبادلي.

(3) نضع $G = \{z \in \mathbb{C} / |z - i| = 1\}$ بين أن (G, T) زمرة جزئية ل $(\mathbb{C} - \{i\}, T)$

الجزء 2

نضع $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / MXJ = JXM\}$

(1) أثبت أن $(E, +)$ زمرة جزئية ل $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

(2) بين أن (E, X) جزء مستقر ل $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), X)$

(3) بين أن $M \in E \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$

(4) استنتج أن $(E, +, X)$ جسم تبادلي.

تمرين 3

(3, 5pnt)

(1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 29x - 36y = 1$

(a) تحقق أن الزوج $(5, 4)$ حل للمعادلة (E)

(b) حل المعادلة E مع إبراز مراحل الحل.

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة $(F) : 2x^{36} - x^{29} - 1 \equiv 0 [52]$. ليكن x حل للمعادلة (F)

(a) بين أن $x \wedge 13 = 1$ ثم استنتج أن $x^{12} \equiv 1 [13]$

(b) بين أن $x^{36} \equiv 1 [13]$ ثم استنتج أن $x^{29} \equiv 1 [13]$

(c) باستعمال السؤال الأول بين أن $x \equiv 1 [13]$

(d) بين أن $x \wedge 4 = 1$ ثم استنتج أن $x \equiv 1 [4]$

(e) بين أن $x \equiv 1 [52]$

(3) حدد مجموعة حلول المعادلة (F)

تمرين 4

(4, 5pnt)

ليكن θ عدد حقيقي من $]0, \frac{3\pi}{4}[$

الجزء 1

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : z^2 + 2iz - 1 + ie^{i2\theta} = 0$. نرمز ب z_1 و z_2 حلول المعادلة (E) في $\mathbb{C}$.

(1) اكتب على الشكل الاسي $-1 + ie^{i2\theta}$ ثم استنتج أن $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

(2) استنتج قيمة θ التي من أجلها $1 - i$ حل للمعادلة (E)

(3) بين أن حلول المعادلة هي $z_1 = -i - e^{i\theta - \frac{\pi}{4}}$ و $z_2 = -i + e^{i\theta - \frac{\pi}{4}}$

(4) بين أن النقط $M_1(z_1), M_2(z_2)$ تتحرك وفق دائرة يجب تحديد مركزها و شعاعها

الجزء 2

ليكن $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين، قاعدتاه هي $[AD]$ و $[BC]$.
 نعتبر الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه C وزاويته θ و نضع $A' = \mathcal{R}(A)$ و $B' = \mathcal{R}(B)$.
 نرمز ب I و J و K منتصفات القطع $[BC]$ و $[AD]$ ت $[BC]$ على التوالي. ننسب المستوى
 العقدي الى المعلم $(I, \vec{u}, \vec{v})$ بحيث a هو لحق C و $b + ic$ لحق D مع a, b و c أعداد حقيقية.
 (1) تحقق من أن لحق B هو $-a$ و أن لحق A هو $-b + ic$.

$$(2) \text{ بين أن } z_{A'} = a(1 - e^{i\theta}) + (-b + ic)e^{i\theta} \text{ و } z_{B'} = a(1 - 2e^{i\theta})$$

$$(3) \text{ أثبت أن } \frac{z_J - z_I}{z_K - z_I} = \frac{a + b}{2a} + i \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \cdot \frac{c}{2a}$$

(4) استنتج أن النقط I, J و K مستقيمية.

تمرين 5

(5, 5pnt)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(0) = 0$ et $(\forall x \neq 0); F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2(t)} dt$

(1) Montrer que la fonction F est impaire.

(2) (a) Montrer que $\forall x > 0; 0 \leq F(x) \leq x$

(b) Dédire que la fonction F est continue à droite en 0 .

(3) (a) Montrer que : $(\forall x > 0)(\exists c \in [x; 2x]); \frac{F(x)}{x} = \frac{c^2}{c^2 + \sin^2(c)}$

(b) Dédire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en déterminant $F'_d(0)$

(4) (a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que

$$\forall x > 0; F'(x) = \frac{x^2 (x^2 + \sin^2(x) (2 - \cos^2(x)))}{(x^2 + \sin^2(x)) (x^2 + \sin^2(x) \cdot \cos^2(x))}$$

(b) - Dédire la monotonie de F sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$ puis donner le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$

(5) (a) Soit $t > 0$, montrer que

$$\frac{t^2}{1 + t^2} \leq \frac{t^2}{t^2 + \sin^2(t)} \leq 1 \text{ et } \frac{\sin^2(t)}{t^2 + \sin^2(t)} \leq \frac{1}{t^2}$$

(b) Dédire que pour tout $x > 0$ on a :

$$x + \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(2x) \leq F(x) \leq x \text{ et } 0 \leq x - F(x) \leq \frac{1}{2x}$$

(c) Calculer les deux limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - F(x)$ et interpréter leurs résultats géométriquement

(6) Construire la courbe (C_F) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

تمرين 1

(3pnt)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة و $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي. نضع :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & x+y \end{pmatrix} \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(1) (a) - بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(b) - اكتب $M(x, y)$ بدلالة I و J ثم استنتج بعد E .

(c) - احسب J^2 ثم استنتج ان المصفوفة J تقبل مقلوبا ثم حدد J^{-1}

(2) (a) - بين أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

(b) - بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية.

(c) - احسب الجداء $M(1, 1) \times M(1, -1)$

(d) - هل $(E, +, \times)$ جسم؟ معللا اجابتك .

(3) نضع $A = M(2, -1)$ و $O = M(0, 0)$ (O هي المصفوفة المنعدمة)

(a) - بين أن : $A^2 - 4A + 3I = 0$

(b) - استنتج أن المصفوفة A تقبل مقلوبا ثم حدد A^{-1} بدلالة I و J .

تمرين 2

(3pnt)

(1) بين أن 163 عدد أولي.

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 13x - 162y = 1$

(a) - حدد حلا خاصا لـ (E)

(b) - حل المعادلة (E)

(3) نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظام $(S) : \begin{cases} x \equiv a[13] \\ x \equiv b[162] \end{cases}$ بحيث a و b عددين من $\mathbb{Z}$

(a) - تحقق من أن $x_0 = 325b - 324a$ حل لـ (S)

(b) - بين أن : $x \equiv x_0[2106]$ $(S) \Leftrightarrow$

(c) - حلا في $\mathbb{Z}$ النظام (S) في حالة : $a = 2$ و $b = 3$

(4) - ليكن x عدد من $\mathbb{Z}$ بحيث : $x^{25} \equiv 3[163]$

(a) - بين أن $x \wedge 163 = 1$: ثم أن $x \equiv 3^{13}[163]$

(b) - استنتج أن : $x \equiv 3^{13}[163] \Leftrightarrow x^{25} \equiv 3[163]$

تمرين 3

(3pnt)

I . نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$(E_a) : 2z^2 + a(1 - i)z + a^2(1 - i) = 0 \quad (a \in \mathbb{C}^*)$$

(1)- احسب $(a + 3ia)^2$

(2)- حدد z_1 و z_2 حبي المعادلة (E_a)

(3) - حدد معيار و عمدة العددين z_1 و z_2 بدلالة معيار و عمدة a .

II . في المستوى العقدي (P) المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A و B التي ألقاها a و ia .

(1)- بين أن المثلث OAB متساوي الساقين و قائم الزاوية.

(2)- نعتبر التطبيق F الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث: $z' = (1+i)z - ia$

(a)- نفترض أن $M \neq A$. بين أن $AM' = \sqrt{2}AM$ ثم حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'} \right)$

(b) - لتكن (C) الدائرة ذات المركز A و الشعاع $\sqrt{2}$. بين أن صورة (C) بالتطبيق F هي دائرة (C') محدد مركزها و شعاعها.

(c)- نعتبر الدوران r الذي مؤكزه A و زاويته $-\frac{\pi}{4}$ و التطبيق $h = r \circ F$

اعط الكتابة العقدية للتطبيق h محدد طبيعته و عناصره المميزة.

تمرين 4 (11pnt)

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي

$$\text{par : } \begin{cases} f_n(x) = x^2 e^{-\frac{n^2}{x^2}}, & x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

الجزء 1

نضع $f = f_1$ و ليكن (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم.

(1) تحقق من أن f دالة زوجية.

(2) (a)- احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

(b)- حدد الفرع الانهائي لـ (C) بجوار $+\infty$

(3) (a)- بين أن f متصبة على يمين 0.

(b)- بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

(4) اعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

(5) لكل n من $\mathbb{N}^*$ و لكل x من $\mathbb{R}$ ، نضع $g_n(x) = x^2 - n^2$

- (a) - بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x \geq x + 1$
- (b) - استنتج : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}) f_n(x) \geq g_n(x)$
- (c) - بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - g_n(x)) = 0$
- (6) في نفس المعلم أنشئ منحنى g_1 و المنحنى (C)

الجزء 2

- (1) (a) - بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد u_n موجب قطعاً $f_n(u_n) = 1$:
- (b) - تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n > 1$
- (c) - بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) u_n > \frac{n}{\sqrt{2 \ln n}}$
- (d) - استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$
- (2) (a) - تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 2(u_n)^2 \ln(u_n) = n^2$
- (b) - تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ln 2 + 2 \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = 2 \ln n$
- (c) - استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln n} = 1$

الجزء 3

- نعتبر الدالة العددية g بحيث $g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt$:
- (1) بين أن الدالة g معرفة على $\mathbb{R}^+$
- (2) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ ثم احسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$.
- (3) (a) - بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) g(x) \geq \sqrt{x} \left(\frac{x}{3} - 1 \right)$
- (b) - استنتج النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$
- (4) (a) - بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) 0 \leq g(x) \leq \sqrt{x} f(\sqrt{x})$
- (b) - استنتج أن g قابلة للاشتقاق على يمين 0.

تمارين 1

11pnt

ليكن n عدد صحيح طبيعي. نعتبر الدالة f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد ممنظم.

الجزء 1 (4ن)

① (أ) بين أن الدالة f_n متصلة على $[0, +\infty[$ (يمكنك وضع $x = t^n$).

0, 5

(ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على $[0, +\infty[$.

0, 5

(ج) احسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$

1

② (أ) ادرس تغيرات الدالة f_1 .

0, 5

(ب) ادرس تغيرات الدالة f_2 .

0, 5

③ (أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

0, 5

(ب) انشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) (نقبل أن النقطة $A(1, 1)$ نقطة انعطاف للدالة (C_2)) (نأخذ

0, 5

$$(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm)$$

الجزء 2 (25, 2ن)

نعتبر الدالة العددية للمتغير x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$

① (أ) أثبت أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0]$ و أن :

$$(\forall x \in]-\infty, 0]) F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

0, 5

(ب) استنتج تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty, 0]$.

0, 5

② (أ) بين أن لكل $x \in]-\infty, 0]$ لدينا

$$\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

0, 5

(ب) تحقق من أن الدالة $x \mapsto x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ دالة أصلية لـ f_1 على المجال $]0, +\infty[$

0, 25

(ج) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$

0, 25

③ نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l عندما يؤول x الى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$

0, 25

الجزء 3 (75, 4ن)

لكل عدد صحيح طبيعي n غير منعدم ، نضع $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$

① (أ) بين أن : $(\forall n \geq 1) u_n \geq 0$

0, 5

(ب) حدد اشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$.

0, 5

(ج) بين أن $u_{n+1} \leq u_n : (\forall n \geq 1)$

0, 25

(د) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة.

0, 25

2 أ) بين أن $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n : (\forall n \geq 1)$ 0, 5

ب) استنتج مساحة الحيز المحصور بين C_1 و C_2 والمستقيمين $x = e$ و $x = 1$ 0, 5

3 أ) بين أن $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1} : (\forall n \geq 2)$ (يمكنك استعمال الاسئلة 1 أ) و 1 ج) و 2 أ)) 0, 75

ب) حدد نهاية المتتاليتين $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(nu_n)_{n \geq 1}$ 0, 5

4 ليكن a عدد حقيقي مخالف ل u_1 . نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي $v_1 = a$ 0, 5

و لكل $(n \geq 1)$ $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n , نضع $d_n = |v_n - u_n|$ 0, 5

أ) بين أن $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1 : (\forall n \geq 1)$ 0, 25

ب) بين أن $\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} : (\forall n \geq 2)$ 0, 25

ج) بين أن $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty$ 0, 25

د) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة. 0, 25

تمرين 2

5pnt

ليكن m عدد عقديا يخالف 1.

الجزء 1 (2, 5)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ذات المجهول z : 0, 5

$$(E_m) : z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$$

1 أ) تحقق من أن $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$ هو مميز المعادلة (E_m) 0, 5

ب) حل المعادلة (E_m) في $\mathbb{C}$. 0, 5

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E_m) يساوي 1. 0, 5

2 نضع $z_2 = m - i$ و $z_1 = 1 - im$ 1

في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

الجزء 2 (2, 5)

المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط M, M_1 و M_2 التي ألقاها على التوالي $z_2 = m - i$ و $z_1 = 1 - im$.

1 حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M, M_1 و M_2 مستقيمية. 0, 5

2 أ) بين أن التحويل R الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث $z' = 1 - iz$ هو 0, 5

دوران ينبغي تحديد مركزه Ω و زاويته.

ب) أثبت أن العدد العقدي $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف اذا و فقط اذا كان $\text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$. 0, 5

ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة. 0, 5

الجزء 3 (0, 5)

حدد طبيعة التحويل f و كذا عناصره الأساسية بحيث $f(z) = (1 + i)z + 1 + i$ لكل z من $\mathbb{C}$. 0, 5

الجزء 1 (5, 1ن)

نعتبر في (E) المعادلة التالية : $113x - 68y = 22$: (E)

- ① بين أن المعادلة (E) تقبل مالا نهاية من الحلول. 0, 5
- ① اوجد حلا خاصا (x_0, y_0) لـ (E) مبزا كيف حصلت عليه. 0, 5
- ① اوجد جميع حلول المعادلة (E) موضحا جميع المراحل. 0, 5

الجزء 2 (25, 4ن)

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

① أ) تحقق من أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}$. 0, 5

ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$ 0, 5

② ليكن p عددا اوليا بحيث $p > 3$.

أ) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$ 0, 5

ب) بين أن p يقسم a_{p-2} . 0, 5

ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q ، يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث 0, 5

$$a_n \wedge q = q$$



تمرين 1

4pnt

الجزء 1

ليكن s عددا صحيحا طبيعيا.① بين أن s^2 عدد فردي إذا و فقط إذا كان s عدد فردي. 0, 25② أثبت أنه إذا كان s عدد فردي فإن $s^2 \equiv 1[8]$. 0, 25

الجزء 2

نقترح في هذا الجزء تحديد المجموعة $E = \{(m, n, s) \in \mathbb{N}^3 / 2^{2m} + 3^{2n} = s^2\}$ ① تحقق من أن المثلث $(2, 1, 5)$ ينتمي الى E . 0, 25الى نهاية التمرين نفترض أن المثلث (m, n, s) ينتمي الى E .② أ) بين أن s عدد فردي. 0, 25ب) بين أن $s^2 - 3^{2n} \equiv 0[8]$. 0, 25ج) بين أن $m \neq 1$. 0, 25③ نفترض أن $m \geq 2$.أ) بين أن العددين $s - 3^n$ و $s + 3^n$ زوجيين. 0, 25ب) نضع $d = \text{pgcd}(s - 3^n, s + 3^n)$.بين أن d يقسم $2s$ و d يقسم 2^{2m} ثم استنتج أن $d = 2$. 0, 5ج) بين أن $s - 3^n = 2$ و أن $s + 3^n = 2^{2m-1}$. استنتج أن $s = 2^{2m-2} + 1$ و أن $3^n = 2^{2m-2} - 1$. 0, 5④ حدد n و s في حالة $m = 2$. 0, 25⑤ نفترض أن $m \geq 3$.أ) بين أن $3^n \equiv -1[16]$. 0, 25ب) حدد حسب قيم العدد الصحيح الطبيعي k باقي قسمة العدد 3^k على 16. 0, 25ج) استنتج أنه لا يوجد مثلث (m, n, s) ينتمي الى E في حالة $m \geq 3$. 0, 25⑥ حدد المجموعة E . 0, 25

تمرين 2

4pnt

الجزئين مستقلين.

الجزء 1

ليكن m من $\mathbb{C}^*$ نعتبر المعادلة $(F_m) : z^2 - (3m - 2i)z + 2m^2 - 4mi = 0$.① تحقق من أن $\Delta = (m + 2i)^2$ هو مميز المعادلة ثم استنتج حلي المعادلة z' و z'' . 0, 5② في هذا السؤال نفترض أن $m = 1 + i$ و نرمز لحلي المعادلة (F_m) ب z_1 و z_2 بحيث

$$|z_1| < |z_2|$$

أ) اعط الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2 . 0, 25ب) تحقق من أن $(-z_1)$ من بين الجذور المكعبة ل z_2 . 0, 25ج) استنتج الشكل الجبري للجذور المكعبة ل z_2 . 0, 5

③ (P) منسوب الى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. نعتبر النقط $A(i)$ و $B(2m)$ و $C(m - 2i)$ أ) بين أن النقط A و B و C مستقيمية اذا و فقط اذا كان $m \in i\mathbb{R}$. ب) نفترض أن $m \notin i\mathbb{R}$. خارج المثلث ABC ننشئ مثلثا قائما للزاوية و متساوي الساقين BCD في D. بين أن $z_D = \frac{(3+i)m - 2(1+i)}{2}$ او $z_D = \frac{(3-i)m - 2(1-i)}{2}$ (يمكنك استعمال الكتابة العقدية للدوران).	0, 5
الجزء 2	
نعتبر المعادلة : $(E_n) \quad z^n = (iz + 2i)^n \quad n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}$ ① أ) حدد الشكل المثلثي للعدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_2) مع $(Im(z_1) > 0)$. ب) نضع : $u_p = z_1^p + z_2^p$ لكل p من $\mathbb{N}$ بين أن $u_p = (-1)^p 2\sqrt{2}^p \cos(\frac{p\pi}{4})$ ② (P) منسوب الى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. نعتبر النقط $A(-2)$ و $M(z)$ حيث $z \in \mathbb{C}$ أ) بين أنه اذا كان z حلا للمعادلة (E_n) فإن $OM = AM$.	0, 5 0, 5 0, 5 0, 5
تمرين 3	
نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = 2x + \ln x + \arctan(\sqrt{x})$	6pnt
الجزء 1	
① بين أن f دالة متصلة على $]0, +\infty[$. ② احسب نهايات f عند محداث D_f ثم أعط الفروع الانتهائية. ③ أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$. ب) احسب f' ثم أعط جدول التغيرات. ج) بين أن $(\forall x \in]0, +\infty[), f'(x) > 2$. ④ بين أن f تقابل من $]0, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده. ⑤ أ) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0, +\infty[$. ب) بين أن $(\forall x \in [\alpha, +\infty[), f(x) \geq x$. ⑥ أنشئ C_f و $C_{f^{-1}}$ في نفس المعلم.	0, 25 0, 5 0, 25 0, 5 0, 25 0, 25 0, 5 0, 25 0, 75
الجزء 2	
نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in]\alpha, +\infty[\end{cases}$	
① بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > \alpha$. ② بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية. ③ بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.	0, 5 0, 5 0, 5

الجزء 3

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v_{n+1} = f^{-1}(v_n) \\ v_0 \in]\alpha, +\infty[\end{cases}$$

❶ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}), |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|v_n - \alpha|$. 0, 25

❷ استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة محددًا نهايتها. 0, 75

تمرين 4

6pnt

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة P_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$

الجزء 1

❶ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in [0, +\infty[), P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$ 0, 5

❷ ادرس تغيرات الدالة P و ضع جدول تغيراتها. 0, 5

❸ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*), P_n(1) < 0$ 0, 5

❹ أ) تحقق من أن

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in [0, +\infty[), P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 0, 75

ب) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*), P_n(2) \geq 0$ 0, 5

❺ بين أن المعادلة $P_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $[1, +\infty[$ و أن $1 < x_n \leq 2$. 0, 5

الجزء 1

❶ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in [0, +\infty[), P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$ 0, 75

❷ استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$ 0, 5

❸ بين أن $(\forall t \in [1, +\infty[), t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$ 0, 5

❹ أ) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$ 0, 5

ب) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 0 < x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln 2}{n}}$ ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. 0, 5

تمرين 5

(Bonus)

Pour $n \geq 1$ un entier, on définit l'indicateur d'Euler de n par :

$$\varphi(n) = \text{card}\{1 \leq k \leq n; k \text{ est premier avec } n\}.$$

❶ Calculer $\varphi(p)$ lorsque p est un nombre premier.

❷ Calculer $\varphi(p^\alpha)$, où p est premier et $\alpha \geq 1$.

❸ Que signifie $\varphi(n)$ pour l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

❹ En déduire que si $n \wedge m = 1$, alors $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

❺ Déduire des questions précédentes une formule pour calculer

$\varphi(n)$ pour tout entier n .

❻a) Soit d un diviseur de n . On pose $A_d = \{1 \leq k \leq n; k \wedge n = d\}$. Quel est le cardinal de A_d ?

b) En déduire que $n = \sum_{d/n} \varphi(d)$



تمرين 1

3, 5pnt

نعتبر * قانون التركيب الداخلي المعرف على المجموعة $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 : a * b = i(a + 1)(b + 1) - 1$$

① بين أن * قانون تبادلي في $\mathbb{C}$. 0, 25

② بين أن * قانون تجميعي في $\mathbb{C}$. 0, 25

③ اوجد في $(\mathbb{C}, *)$ العنصر المحايد. 0, 25

④ حدد العناصر القابلة للمماثلة في $(\mathbb{C}, *)$. 0, 25

⑤ نعتبر المجموعة $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1| = 1\}$

أ) بين أن $(\mathbb{S}, *)$ جزء مستقر من $(\mathbb{C}, *)$. 0, 5

ب) بين أن $(\mathbb{S}, *)$ زمرة تبادلية. 0, 5

⑥ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z * z = 1 + (i * z)$ 0, 5

⑦ حدد و أنشئ في المستوى العقدي المجموعة التالية : $E = \{M(z) / z * z \in i\mathbb{R}\}$ 0, 5

⑧ ليكن $\theta \in]0, \pi[$ نضع $z = -1 + e^{i\theta}$

أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي z . 0, 25

ب) حدد عمدة و معيار العدد العقدي $z * z$. (ناقش حسب قيم θ) 0, 25

تمرين 2

3pnt

في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A و

B و C التي ألقاها على التوالي : $a = 3 + 5i$ و $b = -4 + 2i$ و $c = 1 + 4i$. ليكن f

التحويل في المستوى $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من المستوى $\mathcal{P}$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث

$$z' = (2 - 2i)z + 1 :$$

① حدد طبيعة التحويل f و عناصره المميزة. 0, 25

② أ) حدد لحق النقطة B' صورة B بالتطبيق f . 0, 25

ب) بين أن المستقيمين (CB') و (CA) متعامدان. 0, 5

③ لتكن M نقطة ذات لحق $z = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ، و لتكن M' صورة M بالتحويل f

بين أن المتجهتين $\vec{CM'}$ و $\vec{CA}$ متعامدان اذا و فقط اذا كان $x + 3y = 2$. 0, 5

④ نعتبر المعادلة $(E) : x + 3y = 2$ حيث $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

أ) تحقق من أن الزوج $(-4, 2)$ يحقق المعادلة (E) . 0, 25

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) . 0, 5

⑤ ج) حدد مجموعة النقط M من المستوى العقدي $\mathcal{P}$ التي من أجلها يكون زوج احداثياتها مكون

من أعداد نسبية من المجال $[-5, 5]$ حيث تكون المتجهتان $\vec{CM'}$ و $\vec{CA}$ متعامدتان. أنشئ شكلا

اجماليا.

تمرين 3

3, 5pnt

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث 2027 يقسم $a^3 + b^3$.

الجزء 1

- ① أثبت أن 2027 عدد أولي. 0, 5
- ② بين أن $[2027] b^{2025} = -a^{2025}$. 0, 5
- ③ بين أن : 2027 يقسم a إذا و فقط إذا كان 2027 يقسم b . 0, 5
- ④ نفترض أن 2027 يقسم a . بين أن 2027 يقسم $(a + b)$. 0, 5
- ⑤ عكسيا نفترض أن 2027 لا يقسم a . 0, 5
- أ) بين أن $[2027] b^{2026} = a^{2026}$. 0, 5
- ب) بين أن $[2027] (a + b) = 0$. 0, 5
- ج) استنتج أن 2027 يقسم $(a + b)$. 0, 5

الجزء 2

Bonus

نعتبر في $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ المعادلة $(E) : x^3 + y^3 = 2027(1 + xy)$.

- ① بين أنه إذا كان (x_0, y_0) حل للمعادلة (E) فإنه يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث $(x_0 + y_0) = 2027k$. 0, 5
- ② تحقق من أن : $k(x_0 - y_0)^2 + (k - 1)x_0y_0 = 1$. 0, 5
- ③ بين أن $k = 1$ ، ثم أوجد حلول المعادلة (E) . 0, 5

تمرين 4

10pnt

الجزء 1

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^* - \{1\}$. نعتبر الدالة f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:

$$f_n(x) = n(x - 1) - x \ln x$$

- ① بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ محددا مشتقتها. 0, 5
- ② ادرس تغيرات f_n و اعط جدول تغيراتها. 0, 75
- ③ اثبت أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $]1, +\infty[$ و قارن بين α_n و e^{n-1} . 0, 75
- ④ أ) قارن بين $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ لكل $x > 0$. 0, 75
- ب) ادرس رتبة (α_n) . 0, 5
- ج) استنتج أن (α_n) غير مكبورة. 0, 5
- د) تحقق من أن $\sqrt[n]{\alpha_n} = e^{\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n}}$. 0, 5

الجزء 2

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^* - \{1\}$. نعتبر الدالة g_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x - 1} & x \neq 1, x > 0 \\ g_n(1) = 0 \end{cases}$$

- ① بين أن g_n قابلة للاشتقاق في 1 و حدد $g'_n(1)$ حسب قيم n . 0, 5
- ② بين أن g_n قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$ و $]1, +\infty[$ محددا $g'_n(x)$ لكل x من $]0, +\infty[- \{1\}$. 0, 75

③ اعط جدول تغيرات الدالة g_n في الحالتين :

أ) حالة $n = 2$

0, 5

ب) حالة n فردي أكبر من أو يساوي 3.

0, 5

④ انشئ (C_2) منحنى g_2 في م.م.م $\|\vec{i}\| = 2cm$ (نأخذ : $\alpha_2 \simeq 5$ و $g_2(\alpha_2) \simeq 0,65$).

0, 5

الجزء 3

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{3} dx$

① اثبت أن $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة .

0, 75

② باسنعمال مكاملة بالأجزاء برهن أن $I_{n+1} = \frac{e}{3} - (n+1)I_n$

0, 75

③ احسب I_1 و I_2 .

0, 75

④ اسنتج قيمة $J = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{3\sqrt{3x}} dx$

0, 75



Scanner le code QR pour avoir la solution.

تمرين 1

9pnt

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ مع $\|\vec{i}\| = 1$.

الجزء 1

- 1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 0, 5
- ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) . 0, 5
- 2 ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. 0, 5
- 3 أ) ادرس تقعر المنحنى (C_f) . 0, 5
- ب) انشئ المنحنى (C_f) . 0, 5
- 4 أ) بين أن f حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$: (E) 0, 5
- ب) حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) . 0, 5

الجزء 2

- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و لتكن A_n مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و محاور الأرتاب و المستقيم ذو المعادلة $x = n$.
- 1 احسب A_n بدلالة n . 0, 5
 - 2 احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$. 0, 5

الجزء 3

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = n \int_0^1 (f(x))^n dx$

- 1 بين أن : $u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) . 0, 5
- 2 أ) بين أن $1 \leq \frac{1}{u} \leq 2 - u$ ($\forall u \in [1, 2]$) . 0, 5
- ب) استنتج أن : $x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ($\forall x \in [0, n]$) . 0, 5
- 3 أ) بين أن : $u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) . 0, 5
- ب) بين أن : $u_n \leq \int_0^{\sqrt[n]{n}} e^{-x} dx$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) . 0, 5
- ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها. 0, 5
- 4 ليكن a من المجال $]0, 1[$. 0, 5

أ) بين أن : $\int_a^1 n(f(x))^n dx \leq n(1-a)(f(a))^n$. 0, 5

ب) استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^1 n(f(x))^n dx = 0$. 0, 5

ج) احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a n(f(x))^n dx$. 0, 5

تمرين 2

3pnt

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

0, 25

$$(E) : z^3 - \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)z - (1 + i) = 0$$

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و نعتبر العدد العقدي}$$

1 تحقق من أن الجذور المكعبة للعدد 1 هي 1 و j و $\bar{j}$.

0, 25

$$(S) \begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = i \end{cases} \text{ 2 حدد عددين عقديين } x \text{ و } y \text{ يحققان النظام :}$$

3 ليكن α و β عددين عقديين بحيث $\alpha + \beta$ حل للمعادلة (E) و $\alpha\beta = -ij$.

أ) بين أن α^3 و β^3 يحققان النظام (S).

0, 5

ب) استنتج أن حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل $1 - ij$ و $j(1 - i\bar{j})$ و $\bar{j}(1 - i)$.

0, 75

4 أ) ليكن θ عنصرا من المجال $]0, 2\pi[$.

0, 5

حدد بدلالة θ معيار و عمدة العدد العقدي $1 - (\cos \theta + i \sin \theta)$.

ب) حدد معيار و عمدة كل حل من حلول المعادلة (E).

0, 75

تمرين 3

3pnt

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E_\theta) : z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 0$$

حيث θ بارميتري حقيقي ينتمي الى المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1 أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_θ) .

0, 75

ب) ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_θ) حيث $\text{Im}(z_1) = \tan \theta$.

0, 75

اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

2 لتكن M_1 و M_2 على التوالي صورتي z_1 و z_2 في المستوى العقدي. بين أن المثلث OM_1M_2

0, 75

متساوي الساقين في O .

3 ليكن n من $\mathbb{N}$. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

0, 75

$$(E) : z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 0$$

حدد حلول المعادلة (E) على الشكل المثلثي.

تمرين 4

2pnt

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ النظام $(S) \begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ حيث a و b و p و q أعداد صحيحة و $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

❶ بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث $pu_0 + qv_0 = 1$. 0, 25

ب) بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظام (S) . 0, 5

❷ ليكن x حل للنظام (S) بين أن pq يقسم العدد $x - x_0$. 0, 25

❸ ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $x - x_0$ بين أن x حل للنظام (S) . 0, 5

❹ استنتج مجموعة حلول النظام (S) . 0, 25

❺ استنتج في $\mathbb{Z}$ حلول النظام التالية : $(S') \begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$ 0, 25

تمرين 5

(3pnt)

Partie 1

❶ a) Prouver que 29 est un nombre premier. (0,25p)

b) Soit $x \in \mathbb{N}$ et n un entier naturel tel que $n \equiv 1[28]$. Prouver que $x^n \equiv x[29]$. (0,25p)

❷ On considère l'équation $(E) : 17x - 28y = 1$ où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver un tel couple solution. (0,5p)

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) . (0,5p)

Partie 2

Soit $A = \{x \in \mathbb{N}, x < 29\}$ Pour $x \in A$, on note $f(x)$ le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29 et $g(x)$ le reste de la division euclidienne de x^5 par 29.

❸ a) Prouver que $f(x) \in A$ et $x^{17} \equiv f(x)[29]$, puis Prouver que $g(x) \in A$ et $x^5 \equiv g(x)[29]$. (0,25p)

b) Pour $x \in A$, prouver que $g(f(x)) = x$. (0,25p)

❹ Applications :

On attribue à chaque lettre de l'alphabet et " α " et " β ", l'entier donné par le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	α	β
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

a) Bob code le mot "BENSODA" à l'aide de la fonction f et envoie le message codé à Alice. Voici le codage des cinq premières lettres "B", "E", "N", "S" et "O" :

Message initial	B	E	N	S	O
Entier associé	2	5	14	19	15
Utilisation de f	$2^{17} \equiv 21[29]$	$5^{17} \equiv 9[29]$	$14^{17} \equiv 11[29]$	$19^{17} \equiv 14[29]$	$15^{17} \equiv 18[29]$
Entier associé	21	9	11	14	18
Message codé	U	I	K	N	R

Compléter son message. **(0,5p)**

b) Alice reçoit le message suivant, codé par Bob, à l'aide de la fonction f :

B	J	A	C	I	Z
---	---	---	---	---	---

Décrypter ce message à la place d'Alice. **(0,5p)**

تمرين 1

4pnt

ليكن $(x_0, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ بحيث $\text{pgcd}(x_0, q) = 1$ و لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية

هندسية اساسها q و حدها الأول x_0 و تحقق $x_{n+1} + 2x_{n+3} - 44x_0^2q^n = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) :

① بين أن : $q + 2q^3 = 44x_0$ 0, 25

ب) بين أن : $\text{pgcd}(1 + 2q^2, 4) = 1$ 0, 25

ج) استنتج أن : 4 يقسم q و ان q يقسم 44 ثم حدد $(x_0; q)$. 0, 75

② نفترض في ما يلي أن $(x_0, q) = (3, 4)$ و نضع $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) :

أ) تحقق من أن $S_n = 4^n - 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم استنتج أن $S_n \equiv 0[3]$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$). 0, 5

ب) تحقق من أن $S_{n+1} = 4S_n + 3$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم حدد $\text{pgcd}(S_{n+1}, S_n)$ 0, 5

ج) بين أن $n \equiv 0[2]$ اذا و فقط اذا كان $S_n \equiv 0[5]$ 0, 5

③ بين أن $4^{28} \equiv 1[29]$ 0, 25

④ أ) حدد أصغر عدد طبيعي غير منعدم n يحقق $4^n \equiv 1[17]$ 0, 25

ب) استنتج أن $4^{4k} \equiv 1[17]$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) 0, 25

⑤ حدد أربعة قواسم أولية للعدد S_{28} . 0, 5

تمرين 2

4pnt

ليكن m عدد عقدي يخالف 1.

الجزء 1 (2ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ذات المجهول z :

$$(E_m) : z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$$

① أ) تحقق من أن $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$ هو مميز المعادلة (E_m) 0, 5

ب) حل المعادلة (E_m) في $\mathbb{C}$. 0, 5

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E_m) يساوي 1. 0, 5

② نضع $z_2 = m - i$ و $z_1 = 1 - im$

في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي. 0, 5

الجزء 2 (2ن)

المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألقاها على التوالي $z_2 = m - i$ و $z_1 = 1 - im$.

① حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية. 0, 5

② أ) بين أن التحويل R الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث $z' = 1 - iz$ هو دوران ينبغي تحديد مركزه Ω و زاويته. 0, 5

ب) أثبت أن العدد العقدي $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف اذا و فقط اذا كان $\text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$. 0, 5

ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة. 0, 5

تمرين 3

$f(x) = x^2 \ln(1+x)$. : لتكن f الدالة المعرفة على $D =]-1, +\infty[$ كما يلي :
و ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ بالوحدة $2cm$ و نأخذ $\ln 3 \simeq 1,1$ و $\ln 2 \simeq 0,7$.

5,75pnt

1 احسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأول النتائج مبيانيا.

2 لكل x من D نضع $u(x) = 2 \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$

أ- ادرس تغيرات الدالة u على D . 0,25

ب- احسب $u(0)$ واستنتج إشارة $u(x)$ على D . 0,5

3 بين أن f قابلة للاشتقاق على D واحسب $f'(x)$ لكل x من D ثم ضع جدول تغيرات الدالة f . 1

4 حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند أصل المعلم ثم ارسم (C_f) مبرزاً النقط التي أفصلها $-0,5$ و 0 و 1 و 2 . 1

5 احسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين جزء من (C_f) على $[0,1]$ و محور الأفصيل. 0,75

6 أ- ليكن n من $\mathbb{N}$. بين أن المعادلة $f(x) = \sqrt{n}$ تقبل حلاً بالضبط u_n في D . 0,5

ب- ادرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. 0,25

ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير مكبورة وحدد نهايتها. 0,5

تمرين 4

نعتبر الدالتين العدديتين f و F المعرفتين على $\mathbb{R}^+$ ب : $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$ و $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

6,25pnt

الجزء 1

1 بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ واحسب $F'(x)$ لكل $x > 0$. 0,5

2 لكل $x > 0$ نضع $G(x) = f(x) - \arctan(f(x))$.

أ) بين أن G قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وأن $G'(x) = f(x)$: $(\forall x \in]0, +\infty[)$ 0,75

ب) استنتج أن $G(x) = F(x)$: $(\forall x \in]0, +\infty[)$ 0,75

ج) استنتج أن $\int_0^{\ln(\sqrt{2})} \sqrt{e^{2x} - 1} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$ 0,5

الجزء 2

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{2})} (f(t))^n dt$

1 أ) لكل $x \geq 0$ نضع $g(x) = e^{2x} - 1$ بين أن $g'(x) = 2(1 + g(x))$: $(\forall x \in [0, +\infty[)$ 0,5

ب) استنتج أن $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+2}$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ (لاحظ أن $I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{2})} (g(t))^{\frac{n}{2}} dt$) 0,75

ج) بين أن $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2}$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. 0,75

2 لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $u_n = I_{n+4} - I_n$.

أ) باستعمال السؤال 1 ب) بين أن $u_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0,5

ب) احسب المجموع $\sum_{k=0}^{k=n} u_{4k+1}$ بدلالة I_1 و I_{4n+5} . 0,5

ج) استنتج مما سبق أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ 0,75

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.

- يتضمن موضوع الاختبار أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.

- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالتحليل.....(10 نقط)
- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 نقطة)
- التمرين 3 يتعلق بالحسابيات.....(3 نقط)
- التمرين 4 يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 نقطة)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين 1: (10 نقط)

A. 1- تحقق أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$ 0.25

2- استنتج أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$ 0.25

B. نعتبر الدالة f المعرفة على $I = [0, +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} ; f(0) = \frac{1}{2} \text{ و لكل } x \text{ من }]0, +\infty[$$

و ليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 0.5

ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 0.5

ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- أ) بين أن: $(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$ 0.5

حيث: $g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$

ب) بين أن: $(\forall x \in I) ; 0 \leq g'(x) \leq x^2$ 0.5

ج) استنتج أن: $(\forall x \in I) ; 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$ 0.25

د) حدد منحنى تغيرات الدالة f على I 0.25

3- أ) اعط جدول تغيرات الدالة f 0.25

ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 0.5

(نأخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$)

C. 1- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0, 1[$ بحيث $f(\alpha) = \alpha$ 0.5

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 = \frac{1}{3}$$

أ) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0, 1]$ 0.5

ب) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right) |u_n - \alpha|$ 0.5

- (ج) بين بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 0.5
- (د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تؤول إلى α 0.25
- D. لكل x من I ، نضع: $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$
- 1- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و احسب $F'(x)$ لكل x من I 0.5
- 2- (أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، بين أن: 0.5
- $(\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) = 2 \ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)$ 0.5
- (ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ ، ثم استنتج أن: $\int_0^1 f(t) dt = 2 \ln(2) - 1$ 0.5
- (ج) احسب، بالسنتمتر مربع (cm^2)، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) 0.5
- و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x = 1$.
- E. نضع: لكل k من $\mathbb{N}$ ، $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt$ ، 0.5
- و لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k$ 0.25
- (أ-1) تحقق أن: $0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$; $(\forall k \in \mathbb{N})$ 0.25
- (ب) استنتج أن: $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0.5
- 2- (أ) بين أن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ رتيبة. 0.25
- (ب) استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة. 0.25
- (ج) بين أن النهاية ℓ للمتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق: $\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ 0.25

التمرين 2 : (3.5 نقط)

ليكن m عددا عقديا معلوما وغير منعدم و $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول

$$(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$$

1- تحقق أن: $j^3 = 1$ و $1 + j + j^2 = 0$ 0.5

2- (أ) بين أن مميز المعادلة (E_m) هو: $\Delta = [m(1-j)]^2$ 0.25

(ب) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_m) 0.5

- 0.5 3- نفترض في هذا السؤال أن : $m = 1 + i$
- بين أن $(z_1 + z_2)^{2022}$ عدد تخيلي صرف.
- II. المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$
- ليكن φ التحويل في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث:
- $$z' = (1 + j)z$$
- 0.25 1- حدد طبيعة التطبيق φ وعناصره المميزة.
- 2- نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي m و mj و mj^2
- و لتكن $A'(a')$ و $B'(b')$ و $C'(c')$ صور النقط A و B و C على التوالي بالتطبيق φ ولتكن $P(p)$ و $Q(q)$ و $R(r)$ منتصفات القطع $[BA']$ و $[CB']$ و $[AC']$ على التوالي.
- 0.75 أ) بين أن: $a' = -mj^2$ و $b' = -m$ و $c' = -mj$
- 0.25 ب) بين أن: $p + qj + rj^2 = 0$
- 0.5 ج) استنتج أن المثلث PQR متساوي الأضلاع.

التمرين 3: (3 نقط)

- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1
- نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة $(x+1)^n - x^n = ny$: (E_n)
- ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E_n) في $\mathbb{N}^2$ و ليكن p أصغر قاسم أولي للعدد n
- 0.25 1- أ) بين أن: $[p] \equiv x^n \pmod{p}$
- 0.25 ب) بين أن p أولي مع x و مع $(x+1)$
- 0.25 ج) استنتج أن $[p] \equiv x^{p-1} \pmod{p}$
- 0.5 2- بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن المعادلة (E_n) لا تقبل حولا في $\mathbb{N}^2$
- 3- نفترض أن n عدد فردي.
- 0.5 أ) بين أنه يوجد زوج (u, v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $nu + (p-1)v = 1$
- (نذكر أن p أصغر قاسم أولي للعدد n)
- 0.25 ب) ليكن q و r بالتوالي خارج و باقي القسمة الاقليدية للعدد u على العدد $(p-1)$.
- تحقق أن: $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$
- 0.5 ج) نضع: $v' = -(v+nq)$. بين أن: $v' \geq 0$
- 0.5 د) بين أن المعادلة (E_n) لا تقبل حولا في $\mathbb{N}^2$

التمرين 4: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة غير تبادلية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة تبادلية واحدة وكاملة.

ليكن: $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

1- أ) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$ 0.25

ب) تحقق أن لكل a و b و c و d من $\mathbb{Z}$ ، لدينا: 0.25

$$M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$$

ج) بين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدة. 0.5

2- ليكن φ التطبيق من E نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = |a^2 - 3b^2|$$

بين أن φ تشاكل من $(E, \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, \times)$ 0.5

3- لتكن $M(a, b)$ من E

أ) بين أن: $M(a, b) \times M(a, -b) = (a^2 - 3b^2) \cdot I$ 0.25

ب) بين أنه إذا كانت $M(a, b)$ تقبل مقلوبا في $(E, \times)$ فإن: $\varphi(M(a, b)) = 1$ 0.5

ج) نفترض أن $\varphi(M(a, b)) = 1$ 0.5

بين أن $M(a, b)$ تقبل مقلوبا في $(E, \times)$ وحدد مقلوبها.

4- أ) بين أن: $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ 0.25

ب) استنتج أن الحلقة $(E, +, \times)$ كاملة. 0.25

ج) هل $(E, +, \times)$ جسم؟ (علل جوابك). 0.25

انتهى

التمرين 1 : (10 نقط)

1.A- بين أن: $1+x \leq e^x$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ 0.25

2- بين أن: $0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$; $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ 0.25

ب) استنتج أن: $0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ 0.5

ج) بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$ 0.5

B. نعتبر الدالة f المعرفة على $I = [0, +\infty[$ بما يلي :

$(\forall x \in]0, +\infty[)$; $f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$ و $f(0) = 1$

وليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1-أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 0.5

ب) تحقق أن: $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} - \frac{1-x-e^{-x}}{x^2}$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$ 0.25

ج) استنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 وأن العدد المشتق على اليمين في 0 هو $\left(-\frac{3}{2}\right)$ 0.5

2-أ) بين أن: $f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x+1-e^x(1+x))$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$ 0.5

ب) بين أن: $f'(x) \leq -e^{-2x}$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$ 0.5

(يمكنك استعمال: $1+x \leq e^x$)

ج) استنتج منحنى تغيرات f على I 0.25

3- نقبل أن: $f''(x) = \frac{e^{-2x}}{x^3} (-4x^2 - 4x - 2 + e^x(2+2x+x^2))$; $(\forall x > 0)$

أ) بين أن: $1+x+\frac{x^2}{2} \leq e^x$; $(\forall x \geq 0)$ 0.25

ب) استنتج أن: $f''(x) > 0$; $(\forall x > 0)$ 0.5

4- نقبل أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$

أ) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 0.5

ب) استنتج أن: $|f'(x)| \leq \frac{3}{2}$; $(\forall x \in I)$ 0.5

- 1-5) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5
- ب) ضع جدول تغيرات f 0.25
- ج) حدد الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة لنصف مماسه عند النقطة $T(0;1)$ 0.25
- د) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 0.5
- 1.C- لكل x من $[0;1]$ ، نضع: $g(x) = f(x) - x$
- أ) بين أن g تقابل من $[0;1]$ نحو مجال J يتم تحديده. 0.5
- ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي و حيد α من $]0;1[$ بحيث $f(\alpha) = \alpha$ 0.5
- 2- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n و لكل عدد صحيح k من $\{0;1;\dots;n\}$ ، نعتبر
- الأعداد الحقيقية $x_k = \frac{k\alpha}{n}$ و نضع:
- $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt$ و $J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt$
- أ) بين أن: $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt$; $\forall k \in \{0;1;\dots;n\}$ 0.5
- ب) استنتج أن: $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$; $\forall k \in \{0;1;\dots;n\}$ 0.5
- 3- نضع: $L = \int_0^\alpha f(t) dt$
- أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\left| \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L \right| \leq \frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{n}$ 0.5
- ب) استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^\alpha f(t) dt$ 0.25

التمرين 2: (3.5 نقطة)

- ليكن m من $\mathbb{C} \setminus \{-1;0;1\}$
- I. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ذات المجهول z :
- $(E_m): mz^2 - (m-1)^2 z - (m-1)^2 = 0$
- 1- أ) بين أن مميز المعادلة (E_m) هو: $\Delta = (m^2 - 1)^2$ 0.25
- ب) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_m) 0.5
- 2- نضع و فقط في هذا السؤال $m = e^{i\theta}$ ، حيث: $0 < \theta < \pi$
- اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي. 0.5

II. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحاقهما على التوالي $m-1$ و $\frac{1}{m}-1$

1- بين أن النقط O و A و B مستقيمية إذا و فقط إذا كان $m \in \mathbb{R}$

0.5

2- نفترض أن m غير حقيقي.

لتكن C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و D صورة النقطة A

بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

و لتكن $P(p)$ و $Q(q)$ و $R(r)$ منتصفات القطع $[AC]$ و $[AD]$ و $[OB]$ بالتوالي.

أ) بين أن لحق النقطة C هو: $c = m-1 + \left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.5

و أن لحق النقطة D هو: $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب) بين أن: $2(p-r) = m-1 + \left(\frac{1}{m}-m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)$

0.5

و $2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m}-m\right)$

ج) بين أن: $q-r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$

0.25

د) ما هي طبيعة المثلث PQR ؟ (علل جوابك).

0.5

التمرين 3 : (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وغير تبادلية وغير كاملة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(القانون $\times$ هو الضرب الاعتيادي للمصفوفات)

لكل عدد حقيقي a نضع: $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

ولتكن $G = \{M(a) / a \in \mathbb{R}\}$

1- ليكن التطبيق φ من $\mathbb{R}$ نحو $M_3(\mathbb{R})$ المعرف بما يلي: $\varphi(a) = M(a)$; $(\forall a \in \mathbb{R})$

أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

0.5

- 0.5 (ب) بين أن $\varphi(\mathbb{R}) = G$ ، ثم استنتج أن $(G, \times)$ زمرة تبادلية.
- 0.5 (ج) حدد J العنصر المحايد في $(G, \times)$
- 0.5 (د) حدد مقلوب $M(a)$ في $(G, \times)$
- 0.5 (هـ) حل في $(G, \times)$ المعادلة: $M(1) \times X = M(2)$
- 0.25 (أ-2) بين أن: $M(a) \times J = M(a) \times I$; $(\forall a \in \mathbb{R})$
- 0.5 (ب) استنتج أن لكل a من $\mathbb{R}$ ، $M(a)$ لا تقبل مقلوبا في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$
- 0.25 (ج) تحقق أن المصفوفات على شكل $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ بحيث $x \in \mathbb{R}$ ، حلول في
- 0.25
- المعادلة: $M(1) \times X = M(2)$ في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

التمرين 4: (3 نقط)

- 0.5 1- بين أن العدد 137 أولي
- 0.5 2- حدد زوج (u, v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $38u + 136v = 2$
- 3- ليكن x من $\mathbb{Z}$ بحيث: $x^{38} \equiv 1 \pmod{137}$
- 0.5 (أ) بين أن x و 137 أوليان فيما بينهما،
- 0.5 (ب) بين أن: $x^{136} \equiv 1 \pmod{137}$
- 0.5 (ج) بين أن: $x^2 \equiv 1 \pmod{137}$
- 0.5 4- حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة $x^{19} \equiv 1 \pmod{137}$: (E)

انتهى