

Limite des suites numériques

I. Les suites Numérique

1) La Suite Majoré – la suite Minoré –la Suite Borné

Définition

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est majoré si et seulement s'il existe un nombre réel M tel que $\forall n \in I ; u_n \leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est minoré si et seulement s'il existe un nombre réel tel que $\forall n \in I ; u_n \geq m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est borné si et seulement si il est majoré et minoré

2) La monotonie d'une suite

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique

- On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est une suite croissante si et seulement si : $\forall n \in I ; u_{n+1} \geq u_n$
- On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est une suite décroissante si et seulement si : $\forall n \in I ; u_{n+1} \leq u_n$
- On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est une suite constante si et seulement si $\forall n \in I ; u_{n+1} = u_n$.

Application

Etudier la variation de (v_n) dans chaque cas :

a) $u_n = 6n - 4$

b) $u_n = -5n + 7$

c) $u_n = 2n^2 + 1$

3) La Suite Arithmétique

Définition

On dit que (u_n) est une suite Arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = u_n + r$

- Le nombre r s'appelle raison de la suite Arithmétique (u_n)

Propriété

Soit (u_n) une suite Arithmétique de raison r et n et p deux entiers Naturels tel que $p < n$ alors on a :

➤ u_n s'écrit sous $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n - p)r$

➤ $S = u_p + u_p + \dots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

Application

1. Soit (u_n) est une suite Arithmétique de raison $r = 5$ et $u_1 = 3$
 - a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n
 - b) Calculer $S = u_2 + u_3 + \dots + u_{25}$
2. Soit (u_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 3n + 4$
Montrer que (u_n) est une suite Arithmétique et spécifier sa raison.

4) La Suite géométrique

Définition

On dit que (v_n) est une suite Géométrique s'il existe un nombre réel q tel que $\forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = q \cdot u_n$

- Le nombre q s'appelle raison de la suite Géométrique (v_n)

Propriété

Soit (v_n) une suite Géométrique de raison $q \neq 0$ alors on a :

- v_n s'écrit sous $u_n = u_0 \times q^n$ et généralement $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- $S = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \times v_p$

Application 1

1. Soit (v_n) est une suite Géométrique de raison $q = 3$ et $v_0 = 1$
 - a) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n dans chaque cas :
 - b) Calculer $S = v_1 + v_2 + \dots + v_8$
2. Soit (t_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} ; t_n = 5 \times 2^{n-2}$
 - a) Montrer que (t_n) est une suite géométrique et spécifier sa raison.

II. Limite d'une suite numérique

1) Limite finie d'une suite

Définition

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$.

- On dit que la limite de $(u_n)_{n \geq n_0}$ est l si tout intervalle ouverte de centre l contient tous le terme de $(u_n)_{n \geq n_0}$ partir d'un certain rang et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

2) Limite infinie d'une suite

Définition

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique et $A \in \mathbb{R}$

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à partir d'un certain rang et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $] -\infty; A[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à partir d'un certain rang et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

3) Limite de suites de références

Propriété

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$		• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^r} = 0$	

4) Limite de la suite a^n

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

- Si $a > 1$ alors (a^n) tend vers $+\infty$ en $+\infty$ on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$
- Si $a = 1$ alors (a^n) tend vers 1 en $+\infty$ on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 1$
- Si $-1 < a < 1$ Alors (a^n) tend vers 0 en $+\infty$ on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$
- Si $-1 \geq a$ alors (a^n) n'admet pas une limite en $+\infty$

III. Convergente et divergente d'une suite numérique

1) Suite convergente et suite divergente

Définition

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$

- On dit que (u_n) est convergent s'il admet une limite finie l
- On dit que (u_n) est divergent s'il n'est pas convergent signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ ou (u_n) n'admet pas une limite

Propriété

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

IV. Les opérations sur les limites

Les opérations sur les suites sont les mêmes opérations sur les fonctions

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques et l et l' deux nombre réels

1) Limite d'une Addition

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F I	

2) Limite des produits

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	$l < 0$		$l > 0$		$+\infty$		$-\infty$		0	
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F I	

3) Limite des quotients

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	l		$l < 0$		$l > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I	

V. Critère de la convergent

1) La convergent et l'ordre

Propriété 1

Soient (u_n) ; (v_n) et (w_n) des suites Numérique et $p \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

- Si à partir d'un certain rang $|u_n - l| \leq \alpha v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors (u_n) convergent et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
- Si à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors (u_n) convergent et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

Propriété 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites Numérique et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

- Si à partir d'un certain rang $u_n \geq \alpha v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si à partir d'un certain rang $u_n \leq \alpha v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Propriété 3

- Toute suite croissante et majorée est convergente
- Toute suite décroissante et Minoré est convergente

Remarque

- Attention On Montrée La propriété que la suite convergent (la propriété ne donne pas la limite)

Application (les exercices de série de 1 jusqu'à 10)

2) La convergent de la suite (v_n) avec $v_n = f(u_n)$

Propriété

Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergent vers l et f une fonction continue en l Alors la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ définie par $v_n = f(u_n)$ est convergent vers $f(l)$

3) La convergent de la suite (v_n) avec $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$ et la suite (u_n) définie par son premier terme de I et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) convergent Alors sa limite est la solution de l'équation $f(x) = x$

Application

Exercice 11

I. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$

1) Etudier la variation de f sur $\mathbb{R}^+$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$

3) Montre que $\forall x \in [0; 1[; f(x) > x$

II. Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie par $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0 \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_n \leq 1$

2) Montrer que (u_n) est strictement croissante

3) Montrer que (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

III. Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_n^2 - 1$

1) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et Déterminé sa raison et v_0

2) Exprimer v_n en fonction de n . et Dédire L'expression de u_n

3) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 15

I. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 1}$

1) Etudier la variation de f sur $\mathbb{R}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$

3) Montre que $[0; 1[; f([0; 2]) \subset [0; 2]$

II. Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 2 \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; \sqrt{2} < u_n \leq 2$

2) Montrer que (u_n) est strictement décroissante

3) Montrer que (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$