

I) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite

1) Définition

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A , et soit M un point du plan

La droite qui passe par M et parallèle à (Δ) coupe (D) en un point M'

le point M' s'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ) ou le projeté M sur

(D) parallèlement à (Δ) ou l'image du point M par la

projection $P_{(D;\Delta)}$ sur (D) parallèlement à (Δ) et on

écrit : $P_{(D;\Delta)}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$

la droite (Δ) s'appelle la direction de la projection

$P(M) = M'$: M' l'image du point M par la projection P

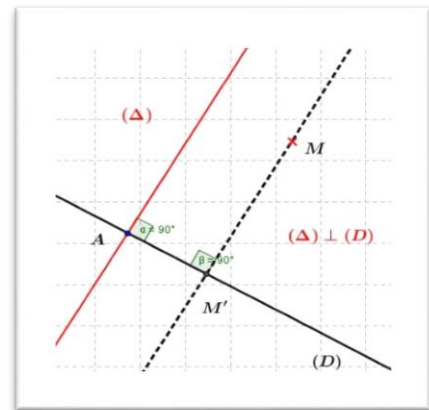
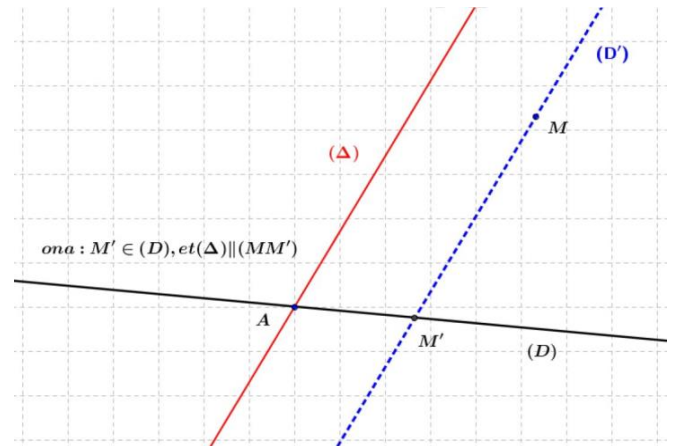
si $B \in (D)$ alors $P(B) = B$ on dit alors que le point B est invariant par la projection P

2. Propriétés

- Chaque point de (D) est confondu avec sa projection
- Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)
- On dit que la droite (D) est invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ)

Cas particulier

Si les droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires (on dit aussi orthogonales) on dit que M' est la projection orthogonale de M sur (D)



Exercice1 : Soit ABC est un triangle et M le milieu de $[AB]$

1) Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

Déterminer : $P_1(A)$; $P_1(C)$, $P_1(B)$, $P_1(M)$,

2) Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

Déterminer : $P_2(A)$, $P_2(C)$, $P_2(B)$, $P_2(M)$

3. La projection d'un segment et de son milieu sur une droite parallèlement à une autre droite

Soi A et B deux points du plan et A' et B' sont respectivement leur projection P sur (D) parallèlement à (Δ)

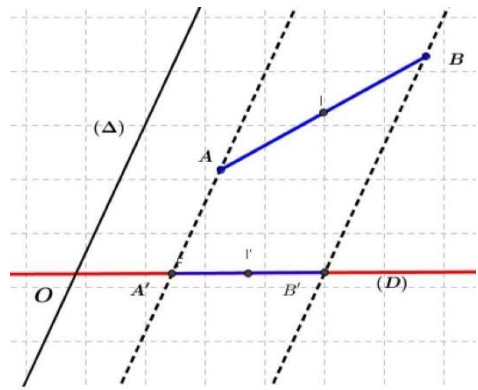
Propriété 1 : L'image du segment $[AB]$ par la projection P est le segment $[A'B']$ et on écrit :

$$P([AB]) = [A'B']$$

Propriété 2 : Si I est le milieu de [AB] alors

$P(I) = I'$ est le milieu du segment $[A'B']$

On dit que la projection conserve les milieux



II) Théorème de Thales et son théorème réciproque

1) Théorème de Thales :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point, et soient $A ; B ; C$ trois points alignés du plan tel que (AB) et (Δ) ne sont pas parallèles

soient $A' ; B' ; C'$ respectivement les projetés des points $A ; B ; C$ sur (D) parallèlement à (Δ)

$$\text{Alors : } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

2) Théorème de Thales avec les vecteurs :

Soient $A' ; B' ; C'$ respectivement les projetés des points $A ; B ; C$ sur droite (D) parallèlement à (Δ)

Si $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$ Alors :
 $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{A'C'}$

On dit que la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

3) le théorème réciproque de Thales

Soient (D) et (D') deux droites non parallèles à une troisième (Δ) , et soient $A ; B$ deux points de la droite (D) tel que A' et B' respectivement les projetés des points $A ; B$ sur (D') parallèlement à (Δ)

Si C un point de la droite (D) et C' un point de la droite (D') tel que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

Et les points $A ; B$ et C sont dans le même ordre sur la droite (D) que les points $A' ; B'$ et C' sur la droite (D')

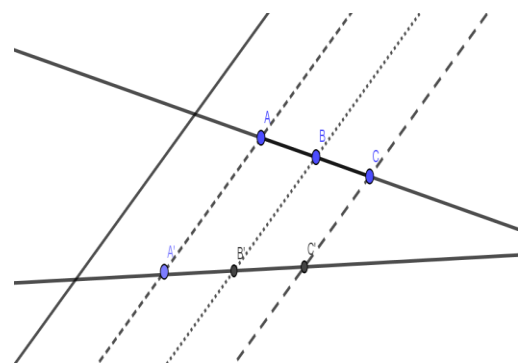
Alors : le point C' est la projection de C sur la droite (D') parallèlement à (Δ) et on a
 $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$

Exercice 2 : Soient ABC est un triangle et M un point définie par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

1) Construire le point M' le projeté de M sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

2) Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ et en déduire que

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$



Propriété : soit $P = P_{(D);(\Delta)}$

Si : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{EF}$ **et** $P(B) = B'$; $P(A) = A'$;
 $P(E) = E'$ **et** $P(F) = F'$

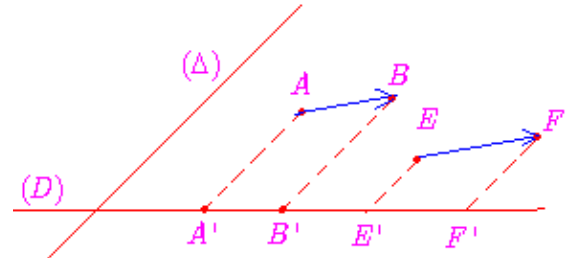
Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{E'F'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes et A ; B ; C ; D des points distinctes et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ET si A' ; B' ; C' et D' respectivement les projetés des points A ; B ; C et D sur la droite (Δ) parallèlement à (Δ')

Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs



Exercice3 : (réciproque de Thalès):

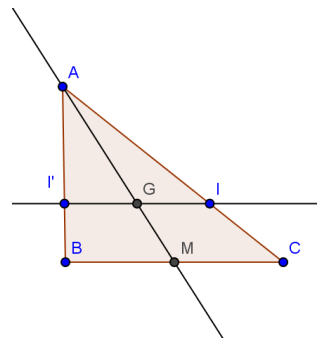
Soient ABC est un triangle et I et I' deux points tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I' est par la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) soit M est le milieu de $[BC]$; la droite (AM) coupe la droite (II') en G

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$



Exercice4 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$. E un point de (AC) tel que :

$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $P_{((AB);(IB))}(E) = F$

Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice5 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$

E un point tel que : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$

La droite qui passe par E et parallèle à (IB) coupe (AC) en J

1)montrer que $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$ et en déduire que : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$

2)si $(IB) \cap (AE) = \{K\}$ montrer que :

$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$

Exercice1 : Soit ABC est un triangle et M le milieu de [AB]

1) Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

Déterminer : $P_1(A)$; $P_1(C)$, $P_1(B)$, $P_1(M)$,

2) Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

Déterminer : $P_2(A)$, $P_2(C)$; $P_2(B)$, $P_2(M)$

Exercice2 : Soient ABC est un triangle et M un point définie par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Construire le point M' le projeté de M sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

2) Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et en déduire que $\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Exercice3 : (réciproque de Thales):

Soient ABC est un triangle et I et I' deux points tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I' est par la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) soit M est le milieu de [BC] ; la droite (AM) coupe la droite (II') en G

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Exercice4 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de [AC]. E un point de (AC) tel que :

$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $P_{((AB);(IB))}(E) = F$

Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice5 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de [AC]

E un point tel que : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$

La droite qui passe par E et parallèle a (IB) coupe (AC) en J

1) montrer que $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$ et en déduire que : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$

2) si $(IB) \cap (AE) = \{K\}$ montrer que : $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$